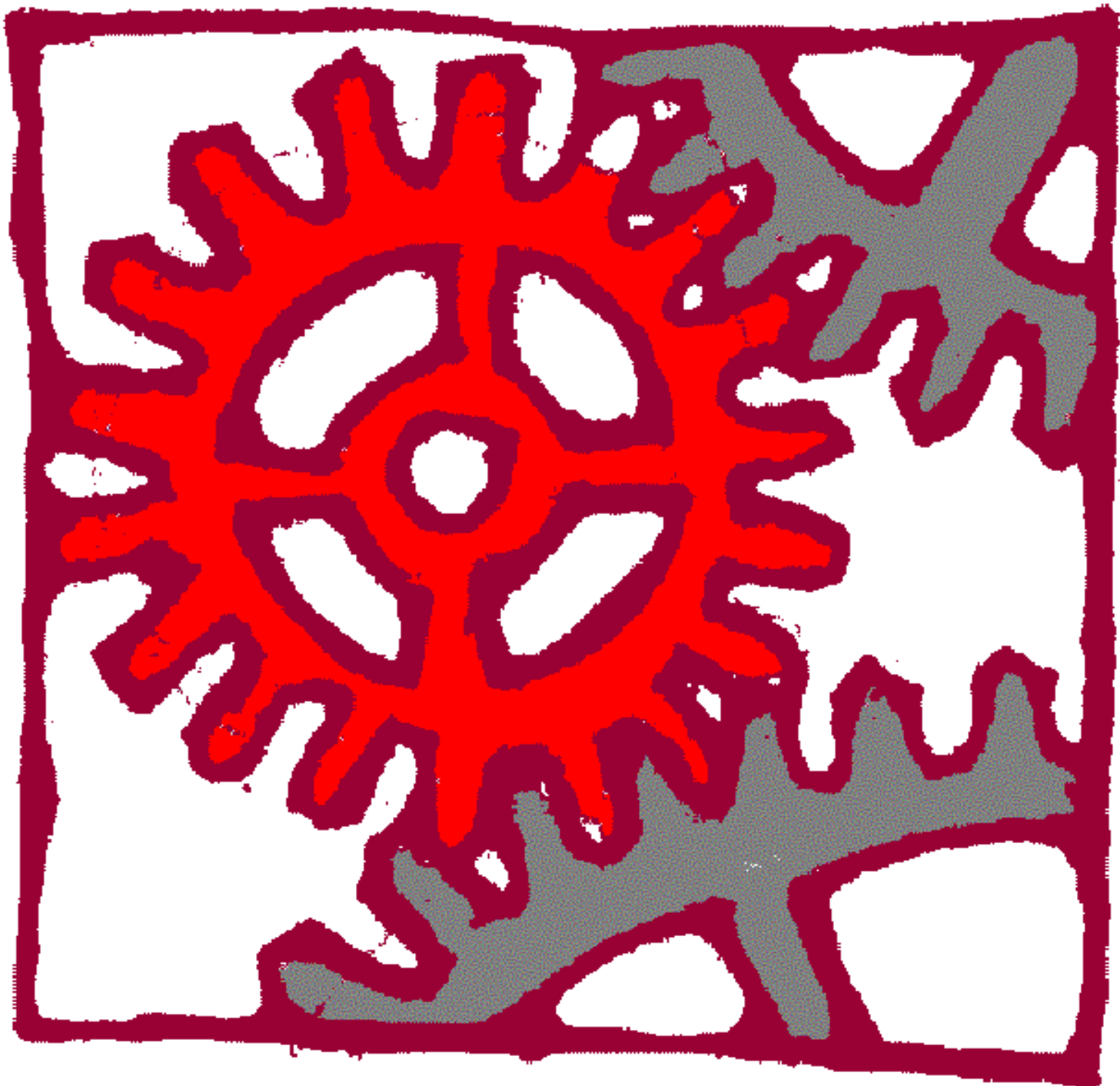




MATEMATIKA A.

Alapvetések informatikusok számára

Matematika A

tankönyv

Technical Code: 171 / DEV_091 / Version: 2.1

**Szofi's Software Engineering Course for
CIT (Certified Information Technologist)
degree**

Tartalomjegyzék

Bevezetés A jegyzet felépítése	5
Néhány megjegyzés a tananyagról.....	5
1. TÉMA Logika	6
171.1.1 Bevezetés.....	6
171.1.2 A kijelentés-logika műveletei.....	7
171.1.2.1 Negáció	7
171.1.2.2 Konjunkció („...és...” művelet)	8
171.1.2.3 Diszjunkció („...vagy...” művelet)	8
171.1.2.4 Implikáció („Ha..., akkor...” művelet)	9
171.1.2.5 Ekvivalencia („...akkor és csak akkor...” művelet)	9
171.1.2.6 Ellenőrző kérdések, feladatok	11
171.1.3 Elemi és összetett kijelentések	12
171.1.3.1 Tautológia.....	12
171.1.3.2 Kontradikció.....	12
171.1.4 A kijelentés-logika következményfogalma.....	12
171.1.4.1 Ellenőrző kérdések.....	14
171.1.4.2 Feladatok.....	14
171.1.5 A kijelentés-kalkulus műveleteiről	15
171.1.6 Normálformák	15
171.1.7 Megjegyzések és pontosítások	16
171.1.8 Predikátumkalkulus.....	16
171.1.8.1 Univerzális kvantifikáció	17
171.1.8.2 Egzisztenciális kvantifikáció	17
171.1.9 De Morgan azonosságok.....	18
171.1.9.1 Ellenőrző kérdések.....	19
171.1.9.2 Feladatok.....	19
2. TÉMA A halmazelmélet alapfogalmai	20
171.2.1 Bevezetés.....	20
171.2.2 Részhalmaz.....	21
171.2.3 Unió.....	22
171.2.4 Venn-diagram	22
171.2.5 Metszet.....	23
171.2.6 Különbség	23
171.2.7 Komplementer	24
171.2.8 Egyszerűbb állítások.....	24
171.2.9 Descartes szorzat.....	25
171.2.10 Ellenőrző kérdések, feladatok.....	27
3. TÉMA Relációk és leképezések	28
171.3.1 Reláció	28
171.3.2 Speciális relációk.....	29
171.3.3 Ekvivalencia reláció	31
171.3.4 Rendezési reláció	31
171.3.5 Leképezés	32
171.3.6 Injekció	33

171.3.7 Szűrjekció	33
171.3.8 Bijekció	34
171.3.9 Leképezések szorzása (kompozíciója)	34
171.3.10 Inverz leképezés	36
171.3.11 Halmazok osztályozása és az ekvivalencia reláció	36
171.3.12 Ellenőrző kérdések, feladatok	38
4. TÉMA Halmazok számossága	40
171.4.1 Bevezetés	40
171.4.2 Számosságok rendezése	45
171.4.3 Ellenőrző kérdések, feladatok	46
5. TÉMA Absztrakt algebra elemei	47
171.5.1 Bevezetés	47
171.5.2 Műveleti tulajdonságok	47
171.5.3 Félcsoport	48
171.5.4 Csoport	48
171.5.5 Gyűrű	49
171.5.6 Háló	49
171.5.7 Test	49
171.5.8 Algebrai struktúrák leképezései	49
171.5.9 Faktorstruktúra	50
171.5.10 A természetes számok konstruálása	51
Programozandó feladatok	53
Logika	53
Halmazok	53
Relációk	53

Bevezetés

Jegyzet felépítése

A jegyzet fejezetei az elméleti ismereteket vázolják fel, de minden témakörhöz gyakorlati feladatok is tartoznak, illetve témakör végén, az adott anyagrészhez kapcsolódó ellenőrző kérdések és feladatlapok találhatóak. Ezek segítségével ellenőrizheti, hogy elsajátította-e azokat az ismereteket, amelyeket az adott témakörben tárgyaltunk. Mivel a jegyzet a távoktatásban résztvevő hallgatók számára készült, ezért elengedhetetlennek tartjuk a levelező listán történő folyamatos párbeszédet, illetve a személyes konzultációkon való megjelenést.

Néhány megjegyzés a tananyagról

A különböző szaktudományoknak nem csak a vizsgálódási területe, de eszközrendszere is jellegzetesen megkülönböztethető. A „reál” vagy „műszaki” elnevezésekkel jelölt szakterületek előszeretettel használják a matematikát, mint a vizsgálatok tárgyát többkevesebb sikerrel leíró eszközrendszert. A számítástechnika témakörébe tartozó objektumok, fogalmak, történések, az azok közötti kapcsolatok modellezésének a legsikeresebb eszköze napjainkban az úgynevezett **diszkrét matematika**. Jegyzetünk célja tehát nem más, mint egyfajta bevezetés a „matematikába” úgy, hogy a tárgyalt területek mindegyike gyakorlati haszonnal is bírjon. A tárgyalt témakörök közül – fontossága miatt – kiemeltük a formális nyelvek és absztrakt automaták témakörét, amelyet külön tantárgyként hallgatják a rendszerprogramozó szakon tanuló hallgatók.

Habár az anyag feldolgozása a középiskolai oktatás matematika anyagának ismeretét – és nem többet – tételezi fel, adunk egy-két tanácsot a „felsőbb” matematikával csak most ismerkedők számára:

A definíció lényegének a megértése az első és legfontosabb feladat.

Mindaddig nem szabad „tovább menni”, ameddig egy fogalmat nem értettünk meg. Szinte minden – még a „legabsztraktabbnak” tűnő – definíció mélyén is valamilyen egyszerű és természetes gondolat húzódik meg. Ha ezt már látjuk, akkor értjük a fogalmat, ha még nem, akkor „ízlelgessük” tovább a definíciót

A feladatmegoldás = problémamegoldás. Sok-sok problémát, feladatot oldjunk meg, sőt konstruáljunk feladatokat. Amennyiben a feladat program megírása, akkor nincs „menekvés”, az algoritmust csak akkor tudjuk megadni, ha valóban értjük a megoldást, ezért – ha csak lehetséges – saját magunk is fogalmazzuk át a feladatokat egy-egy programírási feladattá.

„Ha nem boldogulsz egy feladattal, akkor légy heurisztikus.” A „heurisztikus”, mint melléknévnek a jelentése „felfedezést szolgáló”. Gyakorlatilag arról van szó, hogy érzéseinkre hagyatkozva – a matematika szigorát időlegesen elhagyva – igyekszünk megsejteni nagyvonalakban a megoldást. Természetesen egy megoldás akkor és csakis akkor korrekt, ha az adott tárgyaláson belül pontos.

1. TÉMA

Logika

171.1.1 Bevezetés

A logika a **kijelentések** és a kijelentésekből „konstruált” következtetések ún. **durva szerkezetével**, a következtetések formális szabályaival foglalkozó tudományág. Előadásunkban az ítélet-kalkulussal (vagy más néven a kijelentés-logikával) és a predikátumkalkulussal foglalkozunk. Nem foglalkozunk a logikának a filozófiai vonatkozásaival, így a hegeli dialektikus logikával sem. Megemlíjtük a kétértékű logika alapvetéseit megfogalmazó – Arisztotelésznek tulajdonított – két alapelvet. Ezek a következők:

1. **(Ellentmondástalanság elve)** Egy állítás nem lehet egyidejűleg igaz és hamis.
2. **(Harmadik kizárásának az elve)** Ha egy állítás nem igaz, akkor hamis, és megfordítva.

Kijelentésnek nevezzük azokat a **kijelentő mondatokat**, amelyeknek igaz vagy hamis volta egy adott tárgyaláson belül egyértelműen eldönthető.

Példák:

1. Nincs olyan prímszám, amely páros.
2. Van olyan prímszám, amelyik páros.
3. Dani ügyes.
4. A kelkáposzta-főzelék borzalmas.
5. Az anyag legkisebb elemi részecskéje az atom.
6. Mi a fene!
7. Miért kell nekem éjszaka jegyzetet írnom?

A fenti kijelentő mondatok közül az első kettő igaz/hamis volta triviális. A harmadik és negyedik mondattal a logika képtelen foglalkozni, hiszen ezek igazságtartalma relatív. Ez utóbbi két mondat – mindaddig, amíg az ügyesnek és borzalmasnak lenni fogalmakat nem definiáljuk – nem is kijelentés a fejezet elején adott meghatározás értelmében. Az ötödik mondatunk arra példa, hogy egy állítás igaz/hamis voltának eldöntése nem a logika, hanem a megfelelő szaktudomány feladata. A hatodik és hetedik mondat nem kijelentő mondat, tehát eleve nem fogalmazhat meg ítéletet.

Fontos megjegyeznünk, hogy a fenti fejtegetés csak körülírása és nem definíciója a kijelentésnek. Ezt **alapfogalomnak** tekintjük, azaz nem definiáljuk.

Tekintsük az alábbi kijelentést!

Áron magasabb mint 180 cm.

Ha az „Áron” individuumtól eltekintünk, akkor a fenti mondat az alábbi:

x magasabb, mint 180.

Az x helyére helyettesítsük be egy iskola összes tanulójának a nevét! Nyilvánvalóan lesznek, akikre az állítás igaz és lesznek olyanok, akikre hamis. Amit állítunk – „magasabb, mint 180 cm” – **predikátumnak** nevezzük. A predikátumokat nagybetűvel jelöljük, és a függvényeknél használt jelöléshez hasonlóan az argumentumot is feltüntetjük. Esetünkben:

$$P(x) = x \text{ magasabb mint } 180^1.$$

Ha az x befutja az említett iskola összes tanulóját, akkor a $P(x)$ függvény rendre az igaz vagy hamis értékeket veszi fel. Előbbi példánk ún. **egyváltozós predikátum**, de nem nehéz megadnunk kétváltozósat sem:

$$Q(x,y) = x \text{ magasabb, mint } y.$$

Általánosítva: a $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alakú kifejezéseket n -**változós** predikátumoknak nevezzük.

Ha egy predikátumba – a változó helyére – individuumot helyettesítünk, akkor kijelentést kapunk. A kijelentéseket kisbetűvel jelöljük.

Esetünkben

$$p = \text{Áron magasabb, mint } 180 \text{ cm.}$$

A p kijelentés logikai értékét a $|p|$ szimbólummal, az igaz értéket i -vel, a hamis értéket h -val jelöljük². Azaz, vagy $|p| = i$ vagy $|p| = h$.

171.1.2 A kijelentés-logika műveletei

A jól ismert tagadás kijelentés-logikai megfogalmazása a

171.1.2.1 Negáció

1. Definíció

Ha p kijelentés, akkor a $\neg p$ („nem p ”) is kijelentés. Továbbá a $\neg p$ logikai értéke csak és kizárólag a p logikai értékétől függ.

Nevezetesen:

p	$\neg p$
i	h
h	i

Az alábbi **értéktáblázat** a fenti definíció értékadási részét foglalja össze.

p	$\neg p$
i	h
h	i

Vizsgáljuk meg a fenti definíciót! A definíció első részében a „Ha p kijelentés, akkor a $\neg p$ („nem p ”) is kijelentés.” mondat nagyon fontos. Ez biztosítja számunkra azt, hogy **bármilyen kijelentésnek van negációja**, azaz bármilyen kijelentést tagadhatunk. Nem fordulhat tehát elő az, hogy egy kijelentés tagadásával egy olyan állítást kapunk, amely már

¹ Predikátumok esetén nem szokás a zárójelet kitenni. Mi azért használjuk ezt a rendhagyó, de nem értelemzavaró jelölést, hogy a függvényekkel való hasonlóságot kiemeljük. Tehát, ha a konvenciókhoz tartanánk magunkat, akkor Px -et kellene írunk a $P(x)$ helyett.

² Egyre gyakrabban – főleg az informatikában – használatos a 0 és az 1 használata a h és az i helyett.

nem kijelentés.³ A definíció második része rendelkezik arról, hogy a negációval kapott új kijelentésnek mi lesz a logikai értéke.

171.1.2.2 Konjunkció („...és...” művelet)

Az emberek által beszélt természetes nyelvek mindegyike használja a „és” kötőszót. Ennek a kijelentés-logikai megfelelője a konjunkció művelete.

2. Definíció

Ha p és q kijelentések, akkor a $p \wedge q$ („ p és q ”) is kijelentés. Továbbá a $p \wedge q$ logikai értéke csak és kizárólag a p és a q logikai értékétől függ. Nevezetesen:

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Példa:

Ha a

p = A politikusok rendszerint szeretnek adózni.

q = Nem szeretjük az anarchistákat.

kijelentéseket a konjunkció műveletével kapcsoljuk össze, akkor a

$p \wedge q$ = A politikusok rendszerint szeretnek adózni, és nem szeretjük az anarchistákat.

kijelentést kapjuk. Ez utóbbi – a definíció szerint – akkor és csakis akkor igaz, ha mind a p , mind a q kijelentések igazak. Minden más esetben hamis az állításunk.

171.1.2.3 Diszjunkció („...vagy...” művelet)

3. Definíció

Ha p és q kijelentések, akkor a $p \vee q$ („ p vagy q ”) is kijelentés. Továbbá a $p \vee q$ logikai értéke csak és kizárólag a p és a q logikai értékétől függ. Nevezetesen:

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Példa:

Ha

p = Budapest szép város.

q = New York-ban mindenki görkorcsolyázik.

kijelentéseket a diszjunkció műveletével kapcsoljuk össze, akkor a

³ A művelet és az algebrai zárttság fogalmával később foglalkozunk majd, de megjegyezzük, hogy a definíciónak ez a mondata biztosítja a zártsgot és így azt, hogy a negáció egy egyváltozós művelet a kijelentéseknek egy elegendően bő halmazán.

$p \vee q =$ *Budapest szép város vagy New Yorkban mindenki görkorcsolyázik.*

kijelentést kapjuk. Ez utóbbi, akkor és csakis akkor hamis, ha mond a p , mind a q kijelentések hamisak. Minden más esetben igaz az állításunk.

Vigyázzunk tehát, mert természetes nyelvi érzékünk a „vagy” műveletnél csődöt mond!

171.1.2.4 Implikáció („Ha..., akkor...” művelet)

4. Definíció

Ha p és q kijelentések, akkor a $p \rightarrow q$ („Ha p akkor q ”) is kijelentés. Továbbá a $p \rightarrow q$ logikai értéke csak és kizárólag a p és a q logikai értékétől függ. Nevezetesen:

p	q	$p \rightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Példa:

Ha

$p =$ *Gyerekeim szerint a matek „tökbéna” dolog.*

$q =$ *Én a Coca Cola rabja vagyok*

kijelentéseket az implikáció műveletével kapcsoljuk össze, akkor a

Ha a gyerekeim szerint a matek „tökbéna” dolog, akkor én a Coca Cola rabja vagyok.

kijelentést kapjuk. Ez utóbbi, akkor és csakis akkor hamis, ha a p igaz és a q kijelentés hamis. Minden más esetben igaz az állításunk.

171.1.2.5 Ekvivalencia („...akkor és csakis akkor...” művelet)

5. Definíció

Ha p és q kijelentések, akkor a $p \leftrightarrow q$ („ p ekvivalens q -val”) is kijelentés. Továbbá, a $p \leftrightarrow q$ logikai értéke csak és kizárólag a p és a q logikai értékétől függ. Nevezetesen:

p	q	$p \leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Példa:

Legyenek, p és q az alábbi – közismert – kijelentések:

$p =$ Ha egy háromszög derékszögű, akkor $c^2 = a^2 + b^2$.

$q =$ Ha egy háromszög esetében $c^2 = a^2 + b^2$, akkor a háromszög derékszögű.

Ekkor a $p \leftrightarrow q$ ekvivalencia a jólismert Pitagorasz tétel, nevezetesen: egy háromszög akkor és csakis akkor derékszögű, ha $c^2 = a^2 + b^2$.

1. Tétel (De Morgan azonosságok)

$$(1) \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(2) \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Bizonyítás

Azt kell belátnunk, hogy a p és q kijelentések összes lehetséges értékére az egyenlőségek bal és jobb oldala azonos értékeket vesz fel. Töltsük ki az értéktáblázatot!

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
i	i	i	h	h	h	h
i	h	h	i	h	i	i
h	i	h	i	i	h	i
h	h	h	i	i	i	i

Az első két oszlop a p és q kijelentések összes lehetséges érték páriját tartalmazza. Figyeljük meg, hogy az értéktáblázat negyedik oszlopa – ami az (1) egyenlőség baloldala – rendre azokat az értékeket veszi fel mint az értéktáblázat utolsó oszlopa, amely a fenti egyenlőség jobboldala. Ezzel a (1) helyességét beláttuk. A (2) bizonyítása teljesen hasonló az előzővel.

**2. tétel**

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$$p \wedge p = p \text{ és } p \vee p = p$$

Bizonyítás

A bizonyítás az előző állítás bizonyításához hasonlóan értéktáblázat segítségével történik, így triviális.



171.1.2.6 Ellenőrző kérdések, feladatok

1. Mi a logika tárgya?
2. Egy kijelentő mondatot mikor tekintünk kijelentésnek?
3. Adjon példát kijelentésnek nem tekinthető mondatra!
4. Fogalmazza meg a kétértékű logika arisztotelészi alapelveit!
5. Mit nevezünk predikátumnak?
6. Mit nevezünk individuumnak?
7. Mit jelent a harmadik kizárásának az elve?
8. Mit jelent az ellentmondástalanság elve?
9. Mit értünk n -argumentumú predikátumon?
10. Lásza be, hogy a diszjunkció disztributív a konjunkcióra nézve, és megfordítva!
11. Kommutatív-e az implikáció művelete? Ha igen bizonyítsa, ha nem cáfolja azt!
12. Asszociatív-e az implikáció művelete? Ha igen bizonyítsa, ha nem cáfolja azt!
13. Formalizálja az alábbi kijelentéseket:

Nem veszem meg a görkorcsolyát és még a zsebpénzedből is levonok 100 forintot.

Aki nem dolgozik ne is egyék.

Ha ma itthon maradok, akkor kialszom magam és olvasgatok.

Ha kialszom magam és olvasgatok, akkor itthon maradtam.

Ha nem olvasgatok, és nem alszom ki magamat, akkor nem maradtam otthon.

Aki a Tibi csokit szereti az egyéb gazemberségre is képes.

Ha Schubert „Téli utazás”-át hallgatom Dietrich Fischer-Dieskau-val és közben logika feladatokat fogalmazok, akkor vagy elálmosodom, vagy teát iszogatok.

Kijelentés e a következő:

„Aki ezeket a sorokat írja, annak minden kijelentése hamis.”

14. Interpretáljuk az alábbi formulákat:

a. $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$

b. $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$

c. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

171.1.3 Elemi és összetett kijelentések

Az előzőekben nem tettünk mást, mint **elemi kijelentések** között műveletek segítségével új, **összetett kijelentéseket** konstruáltunk. Vannak olyan – speciális tulajdonsággal bíró – összetett kijelentések, amelyeket érdemes jobban megvizsgálni. Ezek – mintegy a két szélsőséges esetet megfogalmazó kijelentések – a **tautológia** és a **kontradikció**.

171.1.3.1 Tautológia

6. Definíció

Egy A formulát **kielégíthetőnek** nevezünk, ha van olyan interpretációja, amely a formulát igazgá teszi.

Megjegyzés

A fenti definíció gyakorlatilag azt jelenti, hogy van olyan sora a táblázatnak, ahol az A az igaz értéket veszi fel.

7. Definíció

Egy A formulát **tautológiának** nevezünk, ha az a benne szereplő kijelentés-változók összes lehetséges értékeire igaz.

Megjegyzés

A fenti definíció szemléletesen azt jelenti, hogy ha egy tautologikus formulának az értéktáblázatát felírjuk, akkor a formula minden sorban az igaz értéket veszi fel.

Az alábbi formulák példák tautológiára:

$$p \vee \neg p$$

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

171.1.3.2 Kontradikció

8. Definíció

Egy A formulát **kontradikciónak** nevezünk, ha az a benne szereplő kijelentés-változók összes lehetséges értékeire hamis.

Megjegyzés

A fenti definíció szemléletesen azt jelenti, hogy ha egy kontradikciós formula értéktáblázatát felírjuk, akkor a formula minden sorban a hamis értéket veszi fel.

171.1.4 A kijelentés-logika következményfogalma

Már a bevezetőben is említettük, hogy a kijelentés-logika a **következtetések** helyes, illetve helytelen voltának eldöntésével foglalkozik. A probléma tehát az, hogy milyen esetben állíthatjuk, hogy bizonyos kijelentésekből egy másik kijelentés következik e vagy sem.

Példa:

Ha 11 mp alatt futom a száz métert, akkor kijutok az olimpiára.

Kijutottam az olimpiára.

11 mp alatt futom a száz métert.

Mikor mondhatjuk, hogy vonal feletti két kijelentésből – az ún. **premisszákból** – következik a vonal alatti kijelentés, a **konklúzió**? Erre a kérdésre ad választ az alábbi definíció:

9. Definíció

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n > 0$) és B a kijelentés-logika formulái.

A B formula kijelentés-logikai értelemben következménye az A_i formuláknak, ha valahányszor az A_i formulák igazak mindannyiszor a B konklúzió is igaz.

Megjegyzés:

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy felírva az A_i kijelentéseket és a B kijelentést egy közös táblázatba meg kell vizsgálnunk a táblázat sorait. Ha van olyan sor, amelyben az összes A_i formula igaz, de a B formula hamis, akkor a B **nem** következménye a premisszáknak. Minden más esetben – tehát akkor is, ha egyetlen – olyan sor sincs, ahol a premisszák igazak! – a konklúzió következik a premisszákból.

3. Tétel

A 9. Definíció ekvivalens az alábbival:

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n > 0$) és B a kijelentés-logika formulái.

A B formula kijelentés-logikai értelemben következménye az A_i formuláknak, ha

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$$

implikáció tautológia.

Bizonyítás

A bizonyítást – egyszerűsége miatt, feladatként – az olvasóra bízunk.



171.1.4.1 Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk tautológiának?
2. Mit nevezünk kontradikciónak?
3. Lehet e egy kontradikció negációja tautológia?
4. Lehet e kielégíthető formula kontradikció?
5. Bizonyos állításoknak egy másik állítás mikor következménye kijelentés-logikai értelemben?
6. Hamis állításoknak lehet e következménye egy igaz állítás?
7. Igaz állításoknak lehet e következménye egy hamis állítás?
8. Hamis állításoknak lehet e következménye egy hamis állítás?

171.1.4.2 Feladatok

1. Adjunk példákat - emberi nyelven – kontradikcióra!
2. Adjunk példákat - emberi nyelven – tautológiákra!
3. Döntsük el az alábbi következtetésekről, hogy helyesek e vagy sem!
 1. Aki nem dolgozik az nem is ehét.
Pisti nem dogozik.

Pisti nem is eszik.
 2. Ha megnyerjük a választásokat, akkor vagy koalícióra lépünk a kékkel vagy koalícióra lépünk a zöldekkel.
Ha nem nyerjük meg a választásokat, akkor a pirosakkal nem lépünk koalícióra.
Nem léptünk koalícióra a pirosakkal.

Megnyertük a választásokat.
 3. (Lewis Carroll angol matematikus feladata, csak jó idegzetűeknek.)
Ebben a házban macskán kívül más állat nincs.
Minden olyan állatot szívesen dédelgetünk, amelyik szeret a holdra bámulni.
Amelyik állatot utálok, azt elkerülöm.
Nincsen olyan húsevő állat, amelyik ne üvöltene éjjel.
Nincsen olyan macska, amelyik ne fogna egeret.
Azokon kívül, amelyek ebben a házban laknak, egyetlen állat sem barátkozik velem.
A kengurukat nem szívesen dédelgetjük.
Csak húsevő állat fog egeret.
Utálok az olyan állatokat, amelyek nem barátkoznak velem.
Az olyan állatok, amelyek éjjel üvöltenek, szeretnek a holdra bámulni.

Elkerülöm a kengurukat.

171.1.5 A kijelentés-kalkulus műveleteiről

Ha egy műveletben szereplő változók száma n , akkor n -változós műveletről szokás beszélni. A kijelentés-logikában eddig tanult műveletek közül a negáció egyváltozós, a diszjunkció, konjunkció, implikáció, ekvivalencia felfogható kétváltozós műveletként is. Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk meg, hogy a kétváltozós műveletek száma mennyi. Egy kétváltozós művelet esetén, ahol mondjuk a kijelentés-változók a p és a q , a táblázatnak négy sora van, hiszen az i, h négy lehetséges variációban fordulhat elő, nevezetesen:

$$(i, i), (i, h), (h, i), (h, h).$$

Mivel a kijelentés-logika műveleteinek eredménye is igaz vagy hamis, ezért azt kell megvizsgálnunk, hogy a fenti négy értékettőshöz hányféleképpen lehetséges i vagy h értéket rendelni. Ez nyilvánvalóan 16 lehetséges esetet eredményez. Éppen ezért a kétváltozós logikai műveletek száma 16.

Nem nehéz általánosítanunk a feladatot az n -változós logikai műveletekre. Az előbbi gondolatmenetet megismételve azt kapjuk, hogy az n -változós logika műveletek száma 2^{2^n} .

171.1.6 Normálformák

Érdekes és fontos kérdés a következő: ha látunk egy kitöltött értéktáblázatot, anélkül, hogy tudnánk azt, hogy a táblázat kijelentés-változói között milyen művelet van definiálva, fel tudjuk-e ismerni a műveletet, magát? Például tekintsük az alábbi táblázatot!

p	q	r	$?$
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	h
h	h	h	h

A táblázat adatait felhasználva be tudnánk-e írni a kérdőjel helyére a megfelelő formulát? A válasz, igenlő, sőt ennél többet is megmutatunk, nevezetesen, hogy minden n -változós művelet kifejezhető negáció és konjunkció (diszjunkció) segítségével. Eljárásunk a következő:

1. Kiválasztjuk azokat a sorokat, amelyekben a művelet eredménye *igaz*.
2. Minden ilyen sorhoz képezzük az *igaz* komponensek és *hamis* komponensek negációjának konjunkcióját!
3. Az így kapott konjunkciók diszjunkciója lesz a kérdéses művelet.

Három olyan sorunk van, ahol a keresett művelet igaz értéket ad vissza, ezek a következők:

p	q	r	$?$
i	i	i	i
i	i	h	i
h	i	i	i

Képezzük a változók negációjának konjunkcióját! Azaz, $p \wedge q \wedge r$ (első sor), $p \wedge q \wedge \neg r$ (második sor), $\neg p \wedge q \wedge r$ (harmadik sor). Eljárásunk harmadik utasítása szerint ezen konjunkciók diszjunkcióját kell képeznünk, tehát a kérdéses művelet nem más, mint

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

Megvizsgálva a fenti formulát azt látjuk, hogy benne csak a negáció, konjunkció és diszjunkció műveletei szerepelnek. A De Morgan azonosságok szerint a konjunkció kifejezhető diszjunkció és negáció segítségével, és viszont. Ez viszont azt jelenti, hogy a fenti formulát át tudjuk úgy alakítani, hogy abban csak negációk és diszjunkciók (vagy csak konjunkciók) legyenek.

10. Definíció

Azokat a formulákat, amelyek konjunkciós tagok diszjunkciója, továbbá a konjunkciós tagok csak kijelentés-változókat vagy azok negációját tartalmazza **diszjunktív normálformának** nevezzük.

171.1.7 Megjegyzések és pontosítások

Az előző fejezetekben számos dolgot nem határoztunk meg, ezért a pontosság kedvéért – eddigi tudásunk birtokában – vissza kell tekintenünk. Elhagytuk például annak a meghatározását, hogy mit nevezünk formulának! Azért csak most mondjuk ki ezt, mert a definíció annyira újszerű a matematikával most ismerkedők számára, hogy ennek definiálása most célszerű.

11. Definíció

Legyenek $p_1, p_2, \dots, p_r$ kijelentés-változók.

1. A kijelentés-változók mindegyike formula
2. Ha A és B formulák, akkor az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, formulák.
3. Más formula nincs.

A definíció segítségével minden kifejezésről eldönthető, hogy az a kijelentés-logika formulája e vagy sem.

Második megjegyzésünk két formula ekvivalenciájáról szól.

12. Definíció

Két formulát **ekvivalensnek** nevezünk, ha a benne szereplő kijelentés-változók összes lehetséges értékére a két formula azonos értéket vesz fel.

171.1.8 Predikátumkalkulus

Tekintsük az alábbi következtetési sémákat!

Minden macska emlős állat.

Cirmi macska.

Cirmi emlős állat.

Van olyan, aki minden macskát utál.

Cirmi macska

Van, aki utálja Cirmit.

Habár természetes nyelvi érzékünk helyesnek tartja a premisszákból való következtetéseket, a kijelentés-kalkulus eszközeivel – formálisan – semmit sem állíthatunk a következtetések helyes vagy helytelen voltáról. Ennek oka, hogy a kijelentéslogika nem képes kezelni a „minden” és „van olyan” kifejezések lényeges jelentéstani különbségét. A mondatok finomabb szerkezetének vizsgálatához a **predikátumlogika** biztosít eszközrendszert.

A kijelentés-kalkulus tárgyalása során bevezettük az egy-, illetve az n -változós predikátum fogalmát, ahol az U dolgoknak egy összessége és a $P(x)$ egy egyváltozós predikátum volt. Megállapítottuk az előző fejezetben, hogy ha az U -nak egy tetszőleges elemét behelyettesítjük a fenti nyitott mondatba, akkor kijelentést kapunk.

171.1.8.1 Univerzális kvantifikáció

A fenti predikátumot a „minden x -re...”, vagy a „tetszőleges x -re...” típusú mondatrésszel bővítjük, akkor az univerzális kvantifikáció műveletét végezzük el.

Példa:

Ha a

$$P(x) = x \text{ páros szám}$$

egy predikátum, az U alaphalmaz pedig az összes valós szám, akkor a fenti kiegészítéssel a predikátumunk a következőre – szintén predikátumra – változik:

Minden x -re x páros szám.

(Magyarosabban: Minden szám páros.) Formálisan az univerzális kvantort a $\forall$ jel fogja jelölni. A $\forall x P(x)$ (olvasva: minden x -re $P(x)$). Egy ilyen módosított predikátumhoz hozzárendelhető az „igaz”, „hamis” értékek valamelyike az alábbi módon:

13. Definíció

$$\forall x P(x) = \begin{cases} i & \text{ha minden } x \in U \text{ esetén } |P(x)| = i \\ h & \text{más esetben} \end{cases}$$

171.1.8.2 Egzisztenciális kvantifikáció

Amennyiben a fentieket úgy módosítjuk, hogy a „minden...” és rokon értelmű megfogalmazásait a „létezik olyan x ...”, „van olyan x ...” megfogalmazásokkal helyettesítjük – azaz, az eredeti predikátumot a fenti előtaggal látjuk el –, akkor az egzisztenciális kvantifikáció műveletét végezzük el.

Formálisan az egzisztenciális kvantort a $\exists$ jel fogja jelölni. A $\exists x P(x)$ olvasva: létezik x amelyre $P(x)$. Egy ilyen módosított predikátumhoz hozzárendelhető az „igaz”, „hamis” értékek valamelyike az alábbi módon:

14. Definíció

$$\exists x P(x) = \begin{cases} i & \text{ha van olyan } x \in U \text{ amelyre } |P(x)| = i \\ h & \text{más esetben} \end{cases}$$

Megjegyzés

Ha úgy tetszik, akkor a kijelentéseink „finomabb” szerkezetét tudjuk a fentiekkel leírni. Ez gyakorlatilag annyit tesz, hogy kijelentéseinkben a minden és a létezik kifejezéseket praktikusán kezelni tudjuk. Érdekes és fontos tény, hogy a most tanult eszközrendszer alkalmas a matematikai tételek és bizonyítások formalizálására. Azt, hogy milyen nyelvi eszközrendszer, milyen objektumokat képes kezelni, a formális nyelvészet és a matematikai logika mélyebb fejezetei tárgyalják.

Példák:

Formalizáljuk a közismert

„Ki korán kel, aranyat lel.”

közmondást! A közmondás érezhetően úgy fogalmazható át, hogy

„Mindenki, aki korán kel, az aranyat lel.”

Habár stilárisan borzalmasnak is tűnik, de a

„Mindenkire igaz, hogy ha korán kel, akkor aranyat le.”

átfogalmazás teljes körűen feltárja a mondat szerkezetét. Látjuk, hogy az univerzális kvantort és az implikációt kell alkalmaznunk a formalizálás során. Legyenek a

$$P(x) = x \text{ korán kel}$$

$$Q(x) = x \text{ aranyat lel}$$

predikátumok adottak, az U alaphalmaz pedig tartalmazza az összes embert. A fentieket figyelembe véve a

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

formula a fenti mondatot írja le.

171.1.9 De Morgan azonosságok

Matematikai állításaink bizonyításakor rendkívül fontos, hogy hogyan kell tagadnunk egy „minden...”, illetve „létezik...” típusú kijelentést. Tekintsük az előző példában vett közmondást! Ennek a tagadása – formálisan – nem az, hogy:

„Aki korán kel az nem talál aranyat.”,

sőt nem tekintjük a fenti állítás negációjának az

„Aki korán kel az álmos lesz és semmit sem talál.”

mondatot sem. Mi biztosítja számunkra azt, hogy a szubjektívnak tekinthető próbálkozások ellenében egy használható definícióra támaszkodhassunk azokban az esetekben, amikor egy bonyolultabb szerkezetű mondatot kell negálnunk? Ismét csak a jól ismert De Morgan azonosságok segítenek.

4. Tétel

$$(1) \neg \forall x P x = \exists x \neg P x$$

$$(2) \neg \exists x P x = \forall x \neg P x$$

Mivel a $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ formulát kell negálnunk, ezért az első azonosságot használjuk. Az eredmény

$$\neg(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) = \exists x(\neg(P(x) \rightarrow Q(x)))$$

Azaz, van olyan valaki, akire nem igaz, hogy, ha korán kel, akkor aranyat lel.

171.1.9.1 Ellenőrző kérdések

1. Definiálja az egzisztenciális kvantort!
2. Definiálja az univerzális kvantort!
3. Adjuk meg az n -változós predikátum fogalmát!
4. Mondja ki a predikátumkalkulus De Morgan azonosságait!

171.1.9.2 Feladatok

1. Formalizálja az alábbi kijelentéseket:
 - a. Létezik páros prímszám.
 - b. Minden négyzet négyszög.
 - c. Van olyan számítógép, amelyik elromlik.
 - d. Nincs olyan számítógép, amelyik elromlik.
2. Adott az alábbi kijelentés: „Minden programozó ismeri a predikátumkalkulust.”

Adjuk meg a kijelentés tagadását! Adjuk meg a kijelentés és a tagadással kapott kijelentés formuláját!

3. Legyenek adottak a következő predikátumok:

$P(x)$ „ x prím”,

$E(x)$ „ x páros”

$D(x,y)$ „ y osztható x -szel”.

Fordítsuk le „magyar nyelvre” az alábbi formulákkal leírt kijelentéseket:

- a. $E(2) \wedge P(2)$
 - b. $\exists x(E(x) \wedge D(x,6))$
4. Adja meg a predikátumlogika De Morgan azonosságait!
 5. Formalizáljuk le a „Nem minden arany, ami fénylik” kijelentést!

2. TÉMA

A halmazelmélet alapfogalmai

171.2.1 Bevezetés

Hasonlóan a kijelentéshez a „halmaz” fogalmát is alapfogalomnak tekintjük, azaz nem definiáljuk. Csak a fogalomnak egyfajta körülírását, szinonimáit adjuk meg. Halmaznak bizonyos dolgok – jól definiált – összességét nevezzük. Például halmaznak tekinthetjük a páros számok, prímszámok, háromszögek, stb. összességét. Nem tekintjük halmaznak, viszont az ügyes gyerekek és a finom ennivalók összességét, mert ezek esetében nem eldönthető, hogy egy valami eleme-e a halmaznak vagy sem. Halmazt megadhatunk *felsorolással*, illetve *predikátummal*. A halmazokat nagybetűvel fogjuk jelölni $H, K, L, \dots$ elemeiket pedig kisbetűkkel ($x, y, z, \dots$). Kapcsos zárójel határolja a felsorolt elemeket, illetve a halmazt definiáló predikátumokat.

Példák:

1. $H := \{\text{alma}, \text{körte}, \text{macska}\}$ A H halmaznak három eleme van, nevezetesen az **alma**, a **körte** és a **macska** szavak.
2. $K := \{x | P(x)\}$ halmaz esetén, ahol a $P(x)$ predikátum jelentheti azt, hogy x páros szám. Amennyiben az univerzum adott, akkor minden olyan univerzumbeli elem eleme a K halmaznak, amelyekre a $P(x)$ predikátum igaz.

Azt, hogy egy x elem eleme, illetve nem eleme a H halmaznak az $x \in H$ és az $x \notin H$ szimbólumokkal jelöljük.

15. Definíció

Üres halmaznak nevezzük, és a $\emptyset$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs.

Megjegyzés: használatos még a $\{\}$ jelölés is.

Az alábbi egyszerű tétel az egzisztencia-tételek családjához tartozik. Ezek a tételek azt bizonyítják, hogy bizonyos matematikai objektumok léteznek.

5. Tétel

Létezik az üres halmaz.

Bizonyítás

Tekintsük a $K := \{x | P(x)\}$ halmazt, ahol a $P(x)$ predikátum jelentése a következő:

x páratlan és x kettővel osztható.



Megjegyzés

1. A predikátummal történő elemkiválasztás tényének lehetőségéből azonnal következik, hogy két lényegileg különböző predikátum is kiválaszthatja ugyanazt a halmazt.
2. Már most bevezetjük azokat a konvencionális jelöléseket, amelyeket a későbbiekben használni fogunk, ezek a következők:

- N** természetes számok halmaza
- Z** egész számok halmaza
- R** valós számok halmaza
- C** komplex számok halmaza

171.2.2 Részhalmaz

16. Definíció

A H halmaz **részhalmaza** a K halmaznak, ha H minden eleme egyúttal a K halmaznak is eleme. Jelölése: $H \subseteq K$.

Formalizálva a definíciót:

$$H \subseteq K \leftrightarrow \forall x((x \in H) \rightarrow (x \in K))$$

17. Definíció

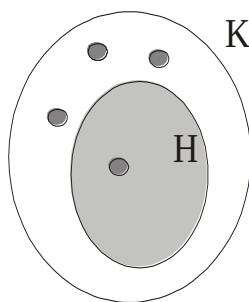
A H halmaz **valódi részhalmaza** a K halmaznak, ha H minden eleme egyúttal K halmaznak is eleme, továbbá van olyan K -beli elem, amely H -nak nem eleme. Jelölése: $H \subset K$.

Formalizálva a definíciót:

$$H \subset K \leftrightarrow \forall x(((x \in H) \rightarrow (x \in K)) \wedge (\exists y(y \in K \wedge y \notin H)))$$

Megjegyzés:

Fontos, hogy tisztázzuk magunkban az „elemének lenni” és a „részhalmazának lenni” közötti különbséget!



18. Definíció

Egy H halmaz összes részhalmazának a halmazát a H halmaz **hatvány halmazának** nevezzük és $P(H)$ -val jelöljük.

Minden halmaznak van két – ún. triviális – részhalmaza, nevezetesen: önmaga és az üres halmaz. Ebből következően a hatványhalmaz sohasem lehet üres.

6. Tétel

Ha a H halmaz n elemet tartalmaz, akkor a hatványhalmaz elemeinek száma 2^n .

Bizonyítás

Mivel a H halmaz véges, ezért elemeit felsorsorozhatjuk, azaz minden halmazbeli elemet elláthatunk egy természetes számmal. Az így felsorsozott elemek alá írunk egy 0-át vagy 1-et. Az 1 jelentse, hogy az adott elem a részhalmazba tartozik, a 0 pedig jelentse azt, hogy az adott elem nem lett kiválasztva.

Például, az alábbi ábrán egy 21 elemű halmazból (annyi kör van a sorban) a feketék egy részhalmaz elemeit jelentik.

○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ● ● ○ ○ ○ ○ ●

Az ehhez a kiválasztáshoz rendelt „bitsorozat” pedig

0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1.

Könnyen belátható, hogy minden 21 hosszú bitsorozat pontosan egy részhalmazt határoz meg, és megfordítva, minden kiválasztott részhalmazhoz – ezek a fekete karikák – megadhatunk pontosan egy 21 hosszú bitsorozatot. Azaz, az összes lehetséges 21 hosszúságú bitsorozatok száma azonos a 21 elemű halmaz részhalmazainak a számával. Ez pedig nem más, mint 2^{21} .

A gondolatmenetet tetszőleges n -elemű halmazra megismételve bebizonyítottuk az állítást.



171.2.3 Unió

Ha adott halmazoknak egy elegendően bő osztálya, akkor lehetőségünk van arra, hogy műveleteket definiáljunk két halmaz között.

19. Definíció

Adottak a H és K halmazok. A H és K halmazok **uniója** (jelölése: $H \cup K$) is halmaz, továbbá

$$H \cup K = \{x | (x \in H) \vee (x \in K)\}$$

Megjegyzés

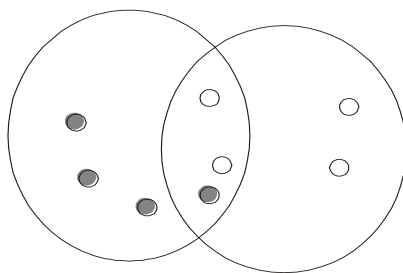
A definíció tetszőlegesen sok halmazra is kiterjeszthető. Nevezetesen:

$$\bigcup_{i \in I} H_i$$

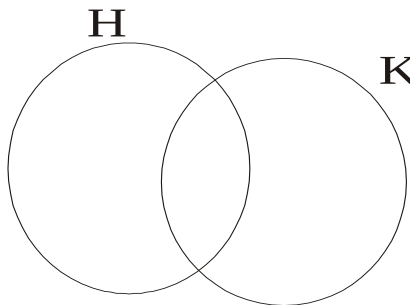
ahol I tetszőleges számosságú indexhalmaz.

171.2.4 Venn-diagram

Nagyon hasznos segédeszközt jelenteken a Venn-diagramok. Ezek a sík pontthalmazaként illusztrálják az általános halmazokat. Egy téglalap jelöli az univerzumot és egy-egy egymásra nyúló körlap az adott halmazokat.



A fenti ábrán a két kör jelöli a két halmazt, a belül lévő pontok pedig az elemeket illusztrálják. Sok esetben csak a körlap határolta pontthalmazok jelölik az elemeket.



171.2.5 Metszet

20. Definíció

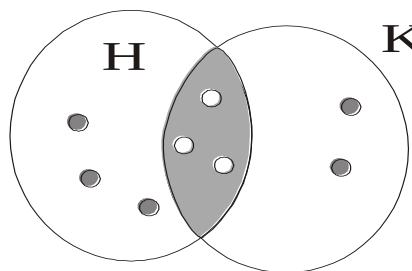
Adottak a H és K halmazok. A H és K halmazok **metszete** (jelölése $H \cap K$) is halmaz, továbbá

$$H \cap K := \{x \mid (x \in H) \wedge (x \in K)\}$$

Megjegyzés

A definíció – hasonlóan az uniónál látottakhoz – tetszőlegesen sok halmazra is kiterjeszthetjük.

$$\bigcap_{i \in I} H_i$$

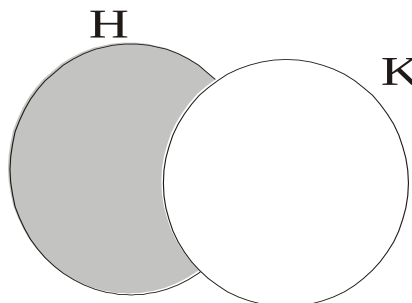


171.2.6 Különbség

21. Definíció

Adottak a H és K halmazok. A H és K halmazok **különbsége** (jelölése $H \setminus K$) is halmaz, továbbá

$$H \setminus K := \{x \mid (x \in H) \wedge (x \notin K)\}$$

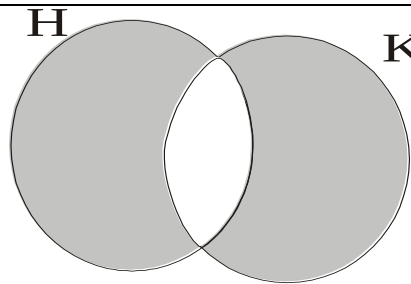


A fenti Venn-diagramon a besatírozott terület jelöli a $H \setminus K$ halmazt.

Sok esetben használjuk a szimmetrikus különbség fogalmát, amelyet az alábbi módon definiálunk:

22. Definíció

$$H \Delta K := (H \setminus K) \cup (K \setminus H)$$



Az árnyékolt terület jelöli a két ponthalmaz szimmetrikus különbségét.

171.2.7 Komplementer

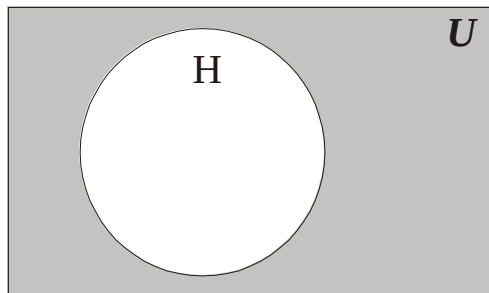
23. Definíció

Adott a H halmaz. A H halmaz **komplementer** halmaza (jelölése: $\bar{H}$) is halmaz, továbbá:

$$\bar{H} := \{x \mid x \notin H\}.$$

Megjegyzés

Ez utóbbi fogalomnak csak akkor van értelme, ha definiálunk egy a H halmazt is tartalmazó ún. univerzumot.



A fenti Venn-diagramból jól kitűnik, hogy $\bar{H} = U \setminus H$.

171.2.8 Egyszerűbb állítások

24. Definíció

Két halmazt **egyenlőnek** nevezünk, ha pontosan ugyan azokat az elemeket tartalmazzák.

7. Tétel

Tetszőleges H, K, L halmazokra

1. $H \subseteq H$
2. Ha $H \subseteq K$ és $K \subseteq H$, akkor $H = K$.
3. Ha $H = K$, akkor $H \subseteq K$ és $K \subseteq H$ egyidejűleg teljesülnek.

Bizonyítás:

A definíciókból triviálisan következnek.



8. Tétel

Tetszőleges H, K, L halmazok esetén:

1. $H \cap H = H$ (idempotencia)
2. $H \cup H = H$
3. $H \cap K = K \cap H$ (kommutativitás)
4. $H \cup K = K \cup H$
5. $(H \cap K) \cup L = (H \cup L) \cap (K \cup L)$ (disztributivitás)
6. $(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)$
7. $(H \cap K) \cap L = H \cap (K \cap L)$ (asszociativitás)
8. $(H \cup K) \cup L = H \cup (K \cup L)$

Bizonyítás

A definíciók alapján nyilvánvaló, ezért azt az olvasóra bízuk. Segítségül csak annyit, hogy az előző tételünk alapján a kétoldali tartalmazásokat (7. tétel 2. állítása) kell belátnunk.

**9. Tétel** (Halmazelméleti De Morgan azonosságok)

Tetszőleges H, K halmazokra teljesül, hogy

$$\overline{(H \cup K)} = \overline{H} \cap \overline{K}$$

$$\overline{(H \cap K)} = \overline{H} \cup \overline{K}$$

Bizonyítás

Mindkét azonosság a definíciókra támaszkodva a kétoldali tartalmazás segítségével könnyen belátható.

**171.2.9 Descartes szorzat****25. Definíció**

Adott H és K tetszőleges halmazok $H \times K$ **Descartes szorzatán** a

$$H \times K := \{(a, b) \mid (a \in H) \wedge (b \in K)\}$$

rendezett párokból álló halmazt értjük.

Az előbbi definíciót tetszőlegesen sok halmaz szorzatára is általánosíthatjuk. Mi csak véges sok halmaz szorzatát definiáljuk az alábbi módon:

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in H_i\}$$

Két halmaz Descartes szorzata, tehát a két halmaz összes lehetséges rendezett párját állítja elő. Természetesen a műveletben résztvevő halmazoknak nem kell feltétlenül különböznie egymástól. Az alábbi példák „nevezetes” Descartes szorzatok:

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$	a sík egészkoordinátájú rácspontjainak a halmaza
$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$	az első síknegyed egészkoordinátájú rácspontjainak a halmaza
$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$	a számsík pontjainak a halmaza ($\mathbf{R}^2$)

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a tér pontjainak a halmaza ($\mathbf{R}^3$)

171.2.10 Ellenőrző kérdések, feladatok

1. Mi a különbség a részhalmaz és a valódi részhalmaz között?
2. Adjon példákat arra, amikor az adott dolgok összessége nem határoz meg halmazt!
3. Mondja ki a halmazelmélet De Morgan azonosságait!
4. Illusztrálja Venn-diagram segítségével a metszetet, uniót, különbséget, szimmetrikus különbséget!
5. Mi a szerepe a predikátumoknak a halmazok megadásában?
6. Két különböző predikátum kijelölheti-e ugyanazt a halmazt?
7. Egy predikátum kijelölhet-e két – egymástól különböző – halmazt?
8. Rajzolja fel az A és B halmaz szimmetrikus különbségének Venn-diagramját!
9. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy tetszőleges H , K és L halmazok esetén $(H \times K) \times L = H \times (K \times L)$.
10. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy a metszetképzés disztributív a Descartes szorzatra!
11. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy a Descartes szorzat asszociatív!
12. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy a Descartes szorzat kommutatív!
13. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$!
14. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$!
15. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$!
16. Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$!
17. Bizonyítsa be, hogy egy n -elemű halmaznak 2^n részhalmaza van!
18. Bizonyítsa be, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$!
19. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1$, akkor a sorozatban szereplő halmazok egyenlők!

3. TÉMA

Relációk és leképezések

171.3.1 Reláció

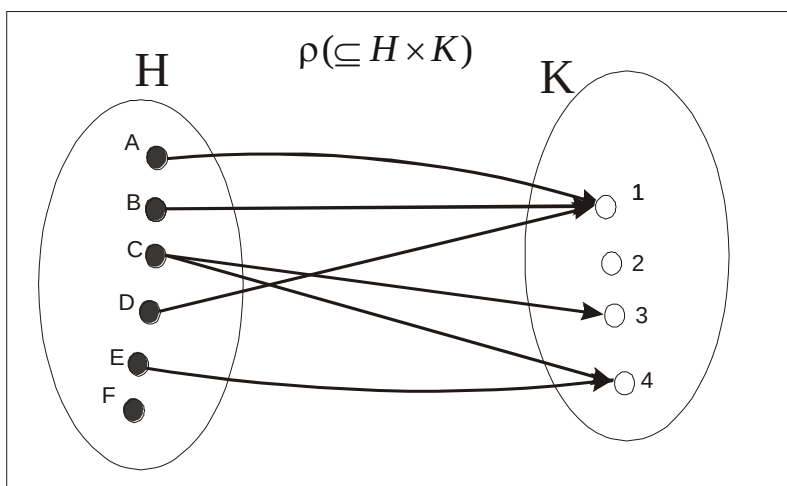
Az egyik leghasznosabb fogalmunk lesz az algebrai „reláció” fogalma.

26. Definíció

A H és K halmaz Descartes-szorzatának tetszőleges ρ **részalmazát** a H és K halmazok közötti kétváltozós relációnak nevezzük.

Megjegyzés

- Ha $(a,b) \in H \times K$, akkor azt úgy is jelölhetjük, hogy $a\rho b$, és úgy olvashatjuk ki, hogy a relációban van b -vel.
- Amennyiben H és K azonosak, akkor **halmazon** értelmezett relációról beszélünk.



A fenti – gráfokkal ábrázolt – reláció, az alábbi Descartes-szorzatból

A,1	A,2	A,3	A,4
B,1	B,2	B,3	B,4
C,1	C,2	C,3	C,4
D,1	D,2	D,3	D,4
E,1	E,2	E,3	E,4
F,1	F,2	F,3	F,4

a következő elempárokat jelöli ki:

A,1	–	–	–
B,1	–	–	–
–	–	C,3	C,4
D,1	–	–	–
–	–	–	E,4
–	–	–	–

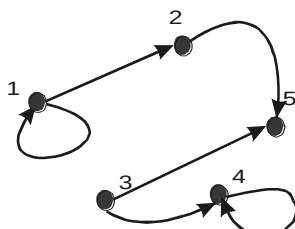
A kétváltozós reláció fogalmát természetes módon terjeszthetjük ki az n -darab halmaz közötti kapcsolatot leíró n -változós relációs fogalmára.

27. Definíció

A $H_1, H_2, \dots, H_n$ halmazok $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ Descartes szorzatának egy tetszőleges ρ részhalmazát a $H_1, H_2, \dots, H_n$ halmazok közötti **n -változós relációnak** nevezzük.

Megjegyzés

1. A Descartes szorzat egy részhalmazának kijelölésekor a predikátumok alkalmazása most is célszerű. Például a „azonos padban ülni” kapcsolat leírásához alkalmazzuk az előadó teremben ülő hallgatók halmazának önmagával vett Descartes szorzatát, majd ebből $P(x,y)$ predikátum segítségével – x azonos padban ül y -nal – válogassuk le azokat és csakis azokat a párokat, amelyekre a predikátum igaz.
2. A relációkat a már megismert rácspontok részhalmazának kijelölésén, vagy felsorolásán túl ún. irányított gráfokkal is ábrázolhatjuk. Tekintsük a $H = \{1,2,3,4,5\}$ **halmazon** definiált alábbi relációt!



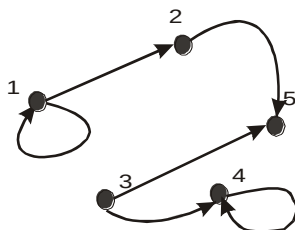
A halmaznak az önmagával vett Descartes-szorzata nem más, mint az 5 elemből képezhető összes rendezett számpárok halmaza. Azt, hogy az $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,4)$ elemei a relációnak az ábrázolja, hogy az elempárok első elemeiből olyan nyilak indulnak ki, amelyek az elempárok második elemeibe futnak be. Például az 1-es elemből két nyíl indul ki, amelyek az 1-es elembe és a 2-es elembe futnak be. Ez a két nyíl jelöli az $(1,1)$ és az $(1,2)$ elempárt.

171.3.2 Speciális relációk

28. Definíció

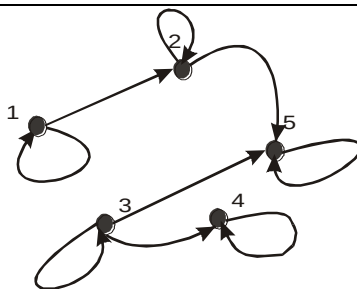
A H halmazon értelmezett ρ reláció **reflexív**, ha $\forall x \in H$ esetén: $x \rho x$.

Az alábbi példáinkban ismét a $H = \{1,2,3,4,5\}$ halmazon definiált relációk segítségével mutatjuk be a speciális eseteket. A



reláció nem reflexív, mert csak az 1-es és a 4-es elemek vannak relációban saját magukkal, azaz nem mind.

Az alábbi reláció reflexív, mert minden elem relációban van egymással.

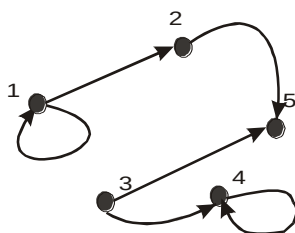


Egy gráf akkor ábrázol reflexív relációt, ha minden csomópontban van egy önmagába visszakanyarodó nyíl. Ha csak egy csomópont esetében ez nem teljesül, akkor az ábrázolt reláció nem reflexív.

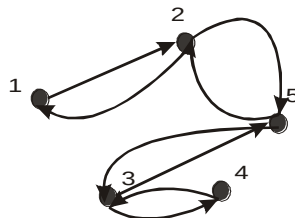
29. Definíció

A H halmazon értelmezett ρ reláció **szimmetrikus**, ha $\forall x, y \in H$ esetén: $x\rho y \rightarrow y\rho x$.

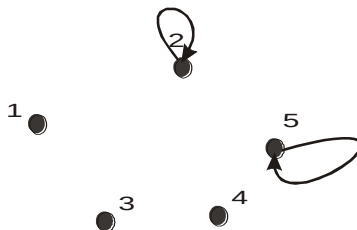
A



reláció **nem szimmetrikus**, mert például az 1 relációban van a 2-vel, de 2 nincs relációban az 1-gyel. Egy gráf akkor ábrázol szimmetrikus relációt, ha **valahányszor** egy A elemből indul ki nyíl egy B elembe **mindannyiszor** a B elemből is fut nyíl az A elembe. Az alábbi reláció szimmetrikus:



Habár a definícióból azonnal következik, de külön is felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha egyetlen nyíl sincs a gráfban – azaz, az üres relációról van szó – vagy egyetlen elemből sem indul ki nyíl egy másik elembe, a reláció akkor is szimmetrikus. Ez a definícióból azért következik, mert az egy implikációt fogalmaz meg, és mint azt már megtanultuk, az implikáció csak egy esetben hamis, amikor az implikáció előtagja igaz, az utótagja pedig hamis. Tehát az alábbi reláció is szimmetrikus:

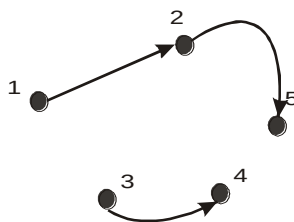


30. Definíció

A H halmazon értelmezett ρ reláció **tranzitív**, ha $\forall x, y, z \in H$ esetén: $((x\rho y) \wedge (y\rho z)) \rightarrow x\rho z$.

Az előbbi példáinkhoz hasonlóan bemutatunk egy nem tranzitív és egy tranzitív relációt.

Ez a reláció nem tranzitív:



A tranzitivitás ott sérül, hogy az 1 relációban van a 2-vel, a 2 relációban van az 5-tel, de az 1 nincs relációban az 5-tel.

Megjegyzés

Ha egy reláció nem reflexív, akkor **irreflexív**. Ez már akkor is igaz, ha egyetlen x elem esetén sérül a reflexivitás. Ennél erősebb fogalom, ha egyetlen elem esetén sem engedjük meg azt, hogy relációban legyen önmagával. Ezt fogalmazza meg az alábbi

31. Definíció

A H halmazon értelmezett ρ reláció **antireflexív**, ha $\forall x \in H$ esetén: $(x, x) \notin \rho$.

Hasonlóan élesíthetjük a szimmetria fogalmát:

32. Definíció

A H halmazon értelmezett ρ reláció **antiszimmetrikus**, ha $\forall x, y \in H$ esetén: $((x \rho y) \wedge (y \rho x)) \rightarrow x = y$.

171.3.3 Ekvivalencia reláció

Az objektumok leírásában és az absztrakt fogalmak konstrukciójában alapvető jelenséggel bír az ekvivalencia reláció fogalma.

33. Definíció

Ha a H halmazon értelmezett reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, akkor azt **ekvivalencia reláció**nak nevezzük.

171.3.4 Rendezési reláció

34. Definíció

Ha a H halmazon értelmezett reláció reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, – és a reláció az egyenlőnek lenni relációtól különböző, – akkor azt **rendezési reláció**nak nevezzük.

35. Definíció

Ha a H halmazon értelmezett egy rendezési reláció, akkor a halmazt **részben rendezett**nek nevezzük.

Megjegyzés

1. A „részben” jelzős szerkezetnek azért van létjogosultsága, mert van olyan részben rendezett halmaz, amelynek nem minden eleme hasonlítható össze. Szemléletesen is elképzelhetjük ezt! Egy részben rendezett halmaz elemeit nem állíthatjuk olyan sorba, ahol az elemek mindegyike vagy megelőz vagy követ valamely másik elemet.
2. Ha a fenti definíciókat kiegészítjük azzal a feltétellel, hogy $\forall x, y \in H$ esetén $|(x \rho y) \vee (y \rho x)| \equiv 1$, akkor lineárisan rendezett halmazhoz jutunk. Ez utóbbi gyakorlatilag azt jelenti, hogy tetszőleges két elem összehasonlítható.

171.3.5 Leképezés

A relációknak, a fentiektől eltérő, egy másik osztályozását adja a következő

36. Definíció

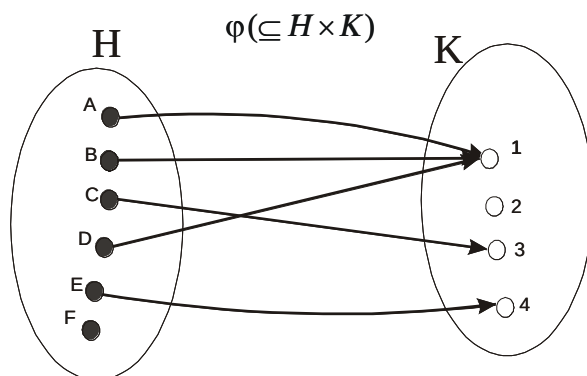
A $\varphi : \subseteq H \times K$ relációt **leképezésnek** nevezzük, ha $\forall x \in H$ esetén $\exists! y \in K$, amelyre teljesül, hogy $(x, y) \in H \times K$.

Megjegyzés

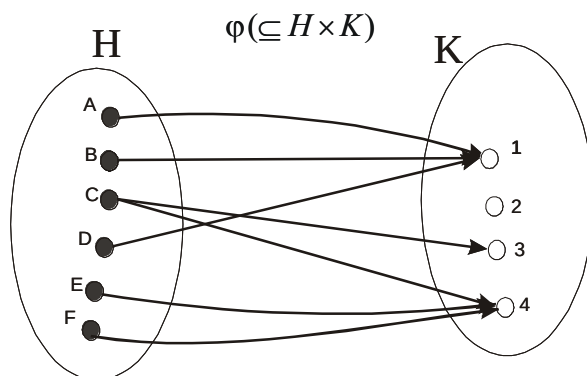
1. A definíció azt jelenti, hogy a $H \times K$ egy részhalmazát, akkor (és csakis akkor) tekintjük leképezésnek, ha **minden** H -beli elemhez **létezik pontosan egy** K -beli elem, amivel az relációban van.
2. A $\exists!$ szimbólumot úgy olvassuk, hogy „létezik pontosan egy”.
3. A két halmaz közötti leképezés, és az előtanulmányokban megismert **függvény** fogalma egy és ugyanaz. A H halmazt a leképezés **értelmezési tartományának**, míg a K halmazt a leképezés **értékkészletének** nevezzük.

A $\varphi : \subseteq H \times K$ leképezést a továbbiakban, a konvenciót követve, a $\varphi : H \rightarrow K$ formában fogjuk megadni. Azt, hogy a leképezés az x elemet y elembe viszi át a $\varphi(x) = y$ fogja jelölni.

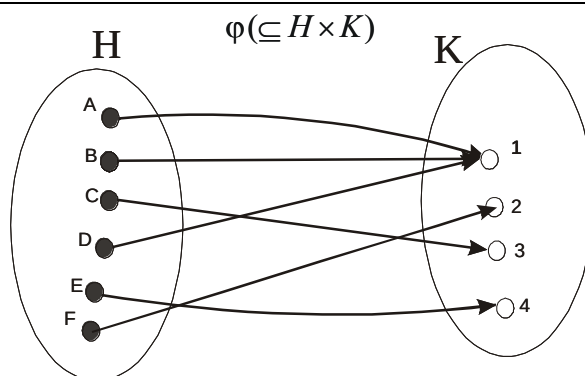
Az alábbi példa a H és K halmazok közötti relációt, illetve leképezést illusztrálja.



A fenti reláció **nem leképezés**, mert H halmaznak nem minden eleméhez rendel K -beli elemet, azaz, nem minden H -beli elemből indul ki nyíl. Az alábbi pedig azért **nem leképezés**, mert van olyan H -beli elem, amelyhez egynél több elemet rendel a reláció, azaz egy H -beli elemből egynél több nyíl indul ki.



Az alábbi megfeleltetés már **leképezés**.



Tovább szigorítva a definíciót jutunk el a speciális leképezésnek tekintendő, **injekció**, **szürjekció** és **bijekció** fogalmához.

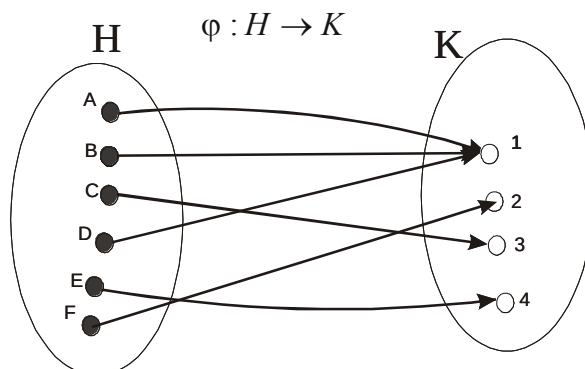
171.3.6 Injekció

37. Definíció

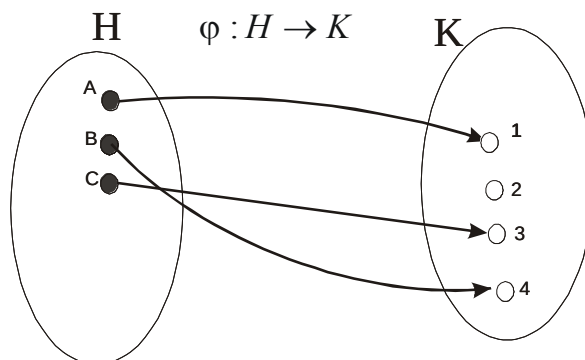
A $\varphi : H \rightarrow K$ leképezést **injekciónak** (injektív leképezésnek) nevezzük, ha $\forall x, y \in H$ esetén, ahol $x \neq y$ teljesül, hogy $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy egy leképezés akkor injekció, ha különböző elemeknek a képe is különböző.

Az alábbi leképezés **nem injekció**.



Ez a leképezés már **injekció**:



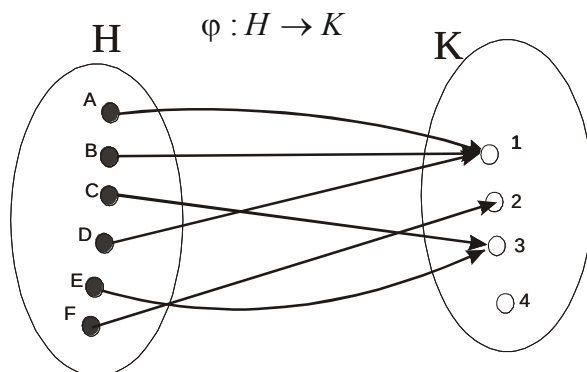
171.3.7 Szürjekció

38. Definíció

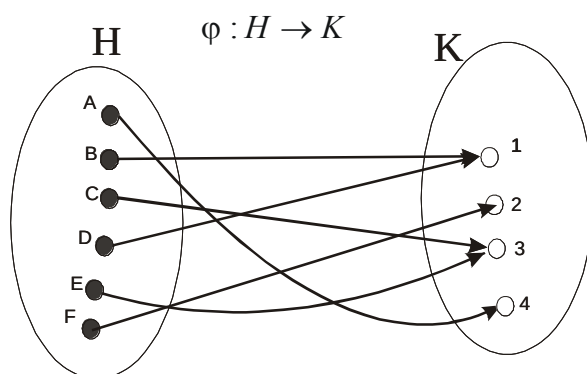
A $\varphi : H \rightarrow K$ leképezést **szürjekciónak** (szürjektív leképezésnek) nevezzük, ha $\forall y \in K$ esetén $\exists x \in H$, amelyre teljesül, hogy $\varphi(x) = y$.

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy szűrjekció esetén az értékkészlet (K halmaz) minden elemének van „őse” a H halmazban.

Az alábbi leképezés **nem szűrjekció**:



Ez a leképezés egy **szűrjekció**, de nem injekció.

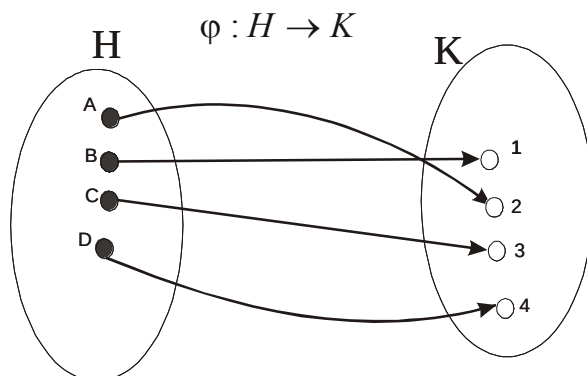


171.3.8 Bijekció

39. Definíció

A $\varphi : H \rightarrow K$ leképezést **bijekciónak** (bijektív leképezésnek) nevezzük, ha injektív és szűrjektív.

Az alábbi leképezés példa bijekcióra:



Megjegyzés

Könnyen belátható, hogy két véges sok elemet tartalmazó halmaz között akkor és csakis akkor létesíthető bijektív leképezés, ha azonos számú elemet tartalmaznak.

171.3.9 Leképezések szorzása (kompozíciója)

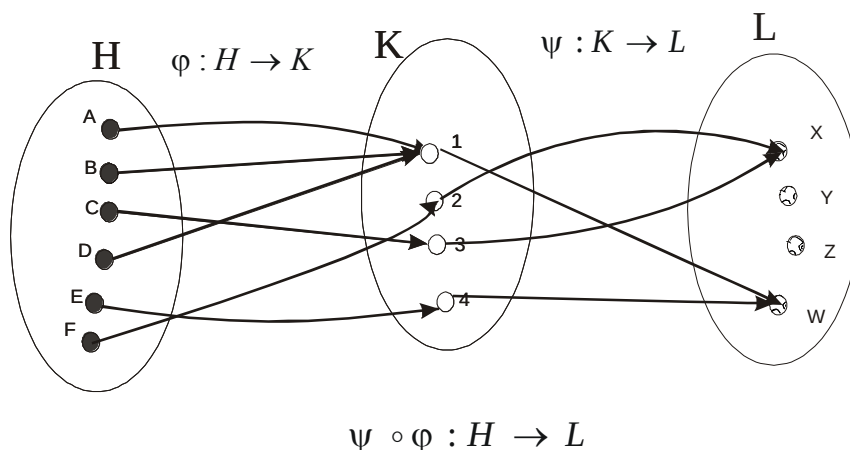
Legyen $\varphi : H \rightarrow K$ és $\psi : K \rightarrow L$ leképezések. Mivel φ leképezés, ezért minden H -beli x elemhez létezik pontosan egy $\varphi(x)$ elem, amely természetesen a K halmaznak az eleme. Továbbá, mivel ψ is leképezés, ezért minden K -beli elemhez, így a $\varphi(x)$ -hez is, létezik pontosan egy L -beli $\psi(\varphi(x))$ elem. Azaz, a két leképezés egymás utáni végrehajtásának eredményeképpen, minden $x \in H$ elemhez, megadható pontosan egy $\psi(\varphi(x)) \in L$ elem, ami azt jelenti, hogy két leképezés egymás utáni végrehajtása a fenti halmazok esetén szintén leképezés. Ez utóbbi leképezést a két leképezés szorzatának, vagy kompozíciójának nevezzük.

Jelölésükben az irodalom nem egységes, néha, ha mint összetett függvényként tekintünk két leképezés kompozíciójára, akkor $\psi(\varphi(x))$ jelölést használjuk, ahol a „belső” függvény eredményéhez rendel értéket a külső függvény. Ha absztrakt algebrai szempontból vizsgáljuk a leképezések szorzását, akkor a $\psi \circ \varphi$ jelölést használjuk, amelyet jobbról balra olvasunk ki.

Leképezések kompozícióját (vagy összetett függvényt) már a középiskolában is használtunk. Gondoljunk például a $\sqrt{|\sin(x)|}$ függvényre, ahol rendre a szinusz, majd az abszolút érték, végül a négyzetgyök függvény „hajtódik” végre.

A leképezések szorzásának tulajdonságait, a művelet fogalmának bevezetésekor részletesen is megvizsgáljuk. Addig is néhány egyszerű, és rövidesen felhasználható állítást mondunk ki.

Az alábbi gráf egy szorzatleképezést illusztrál:



10. Tétel

Ha φ és ψ injektív leképezések, akkor a $\psi \circ \varphi$ leképezés is injektív.

Bizonyítás

A tétel – a definíciókra közvetlenül támaszkodva – feladatként kell belátnia az olvasónak.



11. Tétel

Ha φ és ψ bijektív leképezések, akkor a $\psi \circ \varphi$ leképezés is bijektív.

Bizonyítás

A tétel – a definíciókra közvetlenül támaszkodva – feladatként kell belátnia az olvasónak.



171.3.10 Inverz leképezés

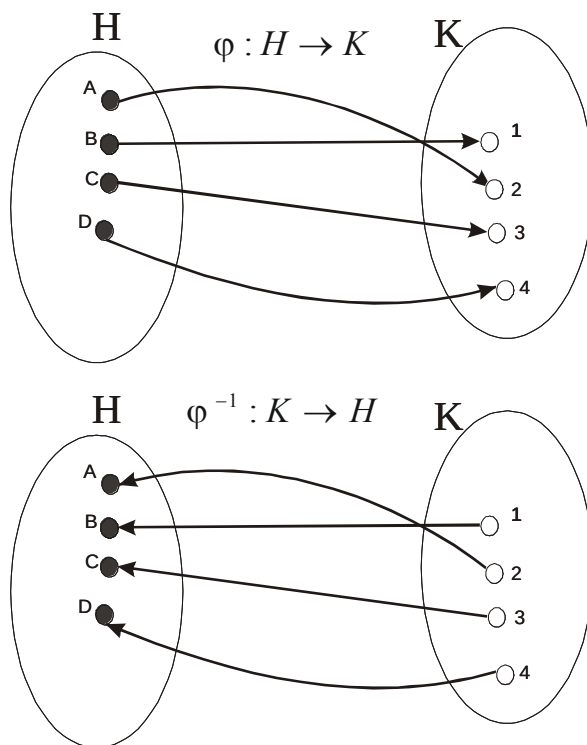
40. Definíció

Legyen $\varphi : H \rightarrow K$ egy leképezés. Ha a $\varphi^{-1} : K \rightarrow H$ leképezés olyan, hogy $\forall x \in H$ esetén $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$, akkor a φ^{-1} leképezést a φ leképezés inverzének nevezzük.

Megjegyzés

A definíció gyakorlatilag azt jelenti, hogy ha egy leképezés után végrehajtjuk annak az inverz leképezését – már amennyiben az egyáltalán létezik – akkor a két leképezés egymás utáni végrehajtása minden elemet önmagához rendeli hozzá. Vezessük be az identikus leképezés egyszerű, de rendkívül fontos fogalmát! Ha egy H halmaz minden eleméhez hozzárendeljük saját magát, akkor leképezésről beszélhetünk. Ezt a leképezést formalizálja és írja le az alábbi

Az alábbi gráf egy leképezés inverzét szemlélteti.



41. Definíció

Az $\varepsilon : H \rightarrow H$ leképezést **identikus leképezésnek** nevezzük, akkor és csakis akkor, ha minden H -beli x elem esetén $\varepsilon(x) = x$.

Megjegyzés

Ha ismerjük az identikus leképezés fogalmát, akkor „elegánsabban” is, bár az előzővel ekvivalens módon, definiálhatjuk az inverz leképezés fogalmát, nevezetesen:

A φ^{-1} leképezés akkor és csakis akkor inverze a φ leképezésnek, ha $\varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{-1} = \varepsilon$.

171.3.11 Halmazok osztályozása és az ekvivalencia reláció

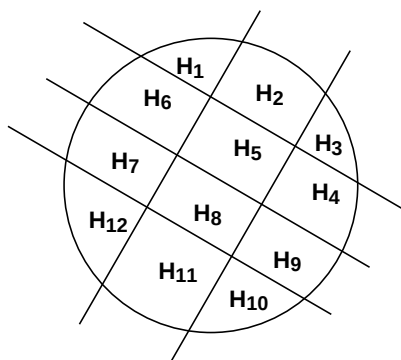
42. Definíció

A H halmaz részhalmazainak egy H_γ , $\gamma \in \Gamma$, rendszerét – ahol Γ tetszőleges számosságú – indexhalmaz a H **halmaz osztályozásának**, vagy más néven **particionálásának** nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1. $H_\gamma \neq \emptyset, \forall \gamma \in \Gamma$ esetén
2. $H_\gamma \cap H_\delta = \emptyset, \gamma \neq \delta, \gamma, \delta \in \Gamma$
3. $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma = H.$

Megjegyzés

1. Az első feltétel biztosítja azt, hogy egyetlen – a partícionálásban szereplő – részhalmaz se legyen üres, a második feltétel szerint a kiválasztott részhalmazok páronként diszjunktak, míg a harmadik kíváncsi arról gondoskodik, hogy a részhalmazok uniója lefedje a H halmazt.
2. Érdekes – és szempontunkból fontos – az a szoros kapcsolat, amely egy halmazon értelmezett ekvivalencia relációk, és a halmaz osztályozásai közötti kapcsolatra vonatkozik. Erre a kapcsolatra utal az alábbi



12. Tétel

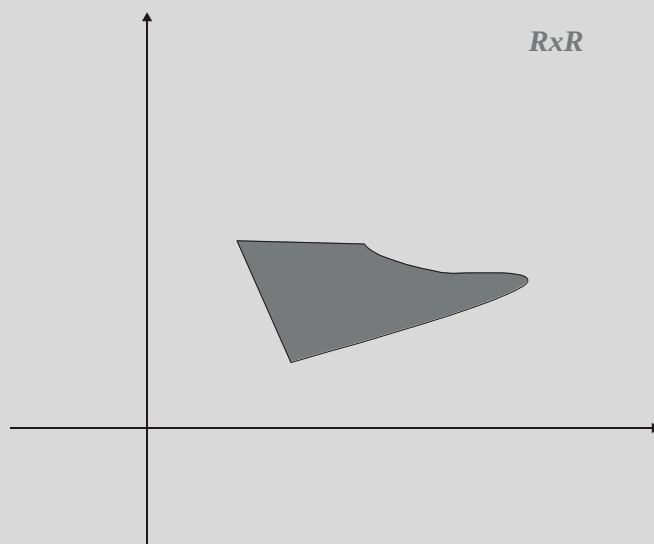
A H halmazon értelmezett minden ekvivalencia relációhoz tartozik egy és csakis egy osztályozása a halmaznak, és megfordítva, a H halmaz minden osztályozásához hozzárendelhető egy és csakis egy ekvivalencia reláció.

Megjegyzés

1. Az előbbi állítás szerint pontosan annyi osztályozása van egy H halmaznak, mint amennyi ekvivalencia reláció definiálható a H halmazon.
2. Ha egy halmazon definiálunk egy ekvivalencia relációt, akkor az szétesik ún. ekvivalencia osztályokra, amely osztályok a halmaz egy osztályozását szolgáltatják. Az egy osztályba tartozó elemek – és csakis ők – állnak relációban egymással.
3. Az ekvivalencia osztályok lehetőséget adnak ún. absztrakt definíciók konstruálására is. Például tekintsük a sík összes egyenesének a halmazát! Két egyenes legyen relációban akkor és csakis akkor, ha azok párhuzamosak egymással! A definiált reláció triviálisan ekvivalencia reláció, és ezért a sík összes egyenesének a halmaza szétesik ekvivalencia osztályokra. Az egy osztályba tartozó egyenesek egymással párhuzamosak. Egy ilyen osztályba tartozó elemek közös tulajdonság segítségével definiálhatjuk például az *irány* fogalmát.

171.3.12 Ellenőrző kérdések, feladatok

- Legyen $H = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Két elem legyen relációban egymással akkor és csakis akkor, ha $a + b \leq 10$. Rajzolja fel a reláció gráfját, majd elemezze tulajdonságait. (Reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás, stb.)
- Legyen $H = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Két elem legyen relációban egymással akkor és csakis akkor, ha $a|b$ (a osztója b -nek). Rajzolja fel a reláció gráfját, majd elemezze tulajdonságait.
- Legyen $H = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Két elem legyen relációban egymással akkor és csakis akkor, ha $2||a - b|$ ($a - b$ abszolút értéke osztható kettővel). Rajzolja fel a reláció gráfját, majd elemezze tulajdonságait.
- Jelölje a H alaphalmaz a földön eddig élt összes embert. Két H -beli elem legyen relációban egymással, ha
 - a testvére b -nek.
 - a édesanyja b -nek.
 - a magasabb mint b .
 - a azonos országban él (élt) mint b .
 - a -nak és b -nek egy napon van (volt) a születésnapja. Elemezze a fenti relációk tulajdonságait!
- Mutasson példát olyan relációra, amelyik nem reflexív, nem szimmetrikus és nem tranzitív!
- Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Tekintsük az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ -nek, az alábbi részhalmazát, ahol a részhalmazt a sötét vonal jelzi.



Lehet-e a fenti részhalmaz binér reláció a valós számok halmazán? Ha igen, akkor lehet-e ez leképezés?

- Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Legyen $a \in \mathbf{R}$ relációban $b \in \mathbf{R}$ -rel, akkor és csakis akkor, ha $b = a^2$. Leképezés-e, ez a reláció? Ha igen, akkor jellemezze a tulajdonságait, ha nem, akkor indokolja azt! Rajzolja fel a reláció gráfját! Mit állíthatunk az inverz létezéséről?

8. Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Legyen $a \in \mathbf{R}$ relációban $b \in \mathbf{R}$ -rel, akkor és csakis akkor, ha $b = \cos(a)$. Leképezés-e, ez a reláció? Ha igen, akkor jellemezze a tulajdonságait, ha nem, akkor indokolja azt! Rajzolja fel a reláció gráfját! Mit állíthatunk az inverz létezéséről?
9. Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Legyen $a \in \mathbf{R}$ relációban $b \in \mathbf{R}$ -rel, akkor és csakis akkor, ha $b = \sqrt{a}$. Leképezés-e, ez a reláció? Ha igen, akkor jellemezze a tulajdonságait, ha nem, akkor indokolja azt! Rajzolja fel a reláció gráfját=
10. Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Legyen $a \in \mathbf{R}$ relációban $b \in \mathbf{R}$ -rel, akkor és csakis akkor, ha $b = \log(a)$. Leképezés-e, ez a reláció? Ha igen, akkor jellemezze a tulajdonságait, ha nem, akkor indokolja azt! Rajzolja fel a reláció gráfját! Mit állíthatunk az inverz létezéséről?

4. TÉMA

Halmazok számossága

171.4.1 Bevezetés

A halmazok elemszámaira – röviden: számosságukra – vonatkozó vizsgálatainkhoz, alapvető lesz az alábbi

43. Definíció

Két halmazt **ekvivalensnek** nevezünk, ha létesíthető közöttük bijektív leképezés.⁴

Megjegyzés

1. Azt, hogy két halmaz ekvivalens azt $H \cong K$ jelöli a továbbiakban.
2. Azt, hogy egy halmaznak n eleme van a $|H| = n$ fogja jelölni.
3. Könnyű belátni azt, hogy ha $|H| = n$ és $|K| = m$, akkor a két halmaz akkor és csak akkor lehet ekvivalens egymással, ha $n = m$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy „véges” halmazok esetén az „ekvivalensnek lenni” és az „ugyanolyan sok elemet tartalmazni” az ugyan azt jelenti. Dedekind a fenti alapvetést általánosítva mondta ki az alábbi két definíciót:

44. Definíció

Egy H halmaz végtelen számosságú, ha létezik olyan $K \subset H$, hogy $H \cong K$ teljesül.

45. Definíció

Ha egy halmaz nem végtelen, akkor véges.

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy az előző definíció egy olyan tényhez köti a végtelen számosságot, amely véges sok elemet tartalmazó halmazok esetében nem létezhet, ezért be kell látnunk azt, hogy egyáltalán létezik-e végtelen számosságú halmaz.

13. Tétel

Van végtelen számosságú halmaz.

Bizonyítás

Tekintsük a természetes számok $\mathbb{N}$ és a páros számok P halmazát. A $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow P$ legyen az a leképezés, amelyik minden természetes számhoz hozzárendeli a kétszeresét, azaz $\varphi(n) = 2n$. A leképezés nyilvánvalóan injektív és szürjektív, azaz bijektív, másrészt $P \subset \mathbb{N}$ is teljesül, tehát $\mathbb{N}$ végtelen számosságú halmaz.



14. Tétel

A sík egész koordinátájú rácspontjainak a halmaza ekvivalens a természetes számok halmazával.

⁴ A természetes szám fogalmának kialakulása – talán – ennek az ősi felismerésnek köszönhető. Minden esetre Bolzano (1781-1848), Dedekind (1831-1916) és Cantor (1845-1918) ez utóbbi gondolatmenet következetes alkalmazásával jutott el a számfogalom mai – széles körben elfogadott – képéhez.

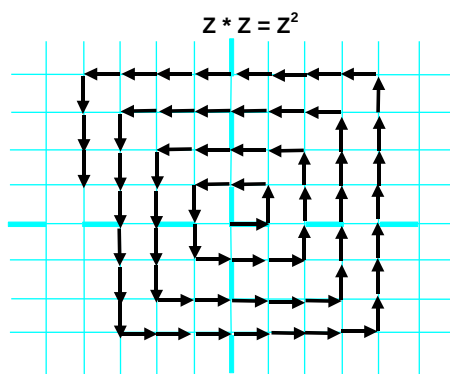
Bizonyítás

Bizonyításunk azon a könnyen belátható tényen alapul, hogy ha egy halmaz elemeit felindexelhetjük – azaz a halmaz minden eleméhez hozzárendelhetünk egy és csakis egy természetes számot –, akkor a halmaz pontosan annyi elemet tartalmaz mint ahány eleme van a természetes számok halmazának. A felindexelést formája az alábbi

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Az elemek jobb alsó részén található természetes számok az indexek, vagy sorszámok. Ha egy halmaz minden eleméhez hozzárendeljük az indexét, akkor ez a megfeleltetés bijekció.

Ennyi előkészítés után úgy látjuk be a tételt, hogy felindexeljük a sík egészkoordinátájú rácpontjainak a halmazát. Tekintsük az alábbi bejárását a rácpontok halmazának:



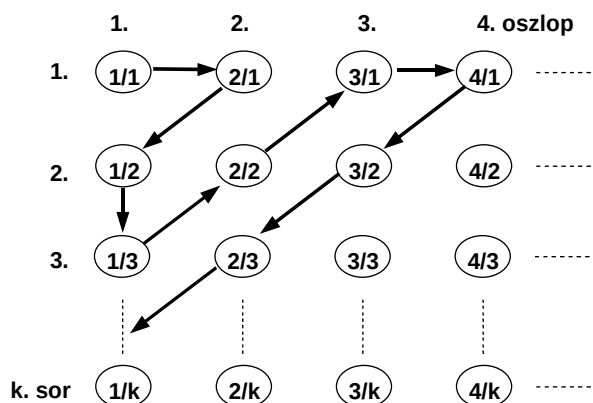
A bejárás során a $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$,... sorrendben járhatjuk be a rácpontok halmazát. Bármelyik rácponthoz elérkezünk véges sok – és egyértelműen megadható – lépésben, és megfordítva minden természetes k számhoz hozzárendelhetjük azt az egyetlen rácpontot, amelyikhez a k . lépésben jutunk el. Azaz, a bejárással definiált megfeleltetés bijekció.

**15. Tétel**

A racionális számok halmaza ekvivalens a természetes számok halmazával.

Bizonyítás

Azt fogjuk belátni, hogy az összes racionális szám felindexelhető a természetes számokkal. A racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, ahol a nevező nem zérus. Első lépésben a pozitív racionális számokra bizonyítjuk tételünket. Tekintsük az alábbi – végtelen sok sorból és oszlopból – álló táblázatot!



Táblázatunk egy-egy pozitív racionális számot többször is tartalmaz, de minden pozitív racionálist tartalmaz. Például az $r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ tetszőleges racionális számot megtalálhatjuk a

p . oszlop és a q . sor kereszteződésében. Tekintsük a nyilakkal szemléltetett bejárást. Ez a bejárást egy felindexelést jelenti a pozitív racionális számok halmazának. Az így felindexelt sorozatból hagyjuk el az ismétlődéseket, azaz egy racionális szám egyszer és csakis egyszer szerepeljen a felsorolásban.

Hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy a negatív racionális számok halmaza is ekvivalens a természetes számok halmazával.

Hátra maradt viszont annak a megválaszolása, hogy ha e két – a természetes számok halmazával ekvivalens – halmazt uniózunk, akkor mit mondhatunk az unió számosságáról.

Segéd-tétel

Ha $H \cong \mathbb{N}$ és $K \cong \mathbb{N}$, akkor $(H \cup K) \cong \mathbb{N}$.

Ha H és K ekvivalensek a természetes számok halmazával, akkor felindexelhetők.

Legyenek

$$H = a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$K = b_1, b_2, b_3, \dots$$

egy-egy felsorolása a két halmaznak. Tekintsük az alábbi bejárást:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$$

Ez utóbbi a $H \cup K$ egy bejárást jelenti, azaz az unió is ekvivalens a természetes számok halmazával.



46. Definíció

Azokat a halmazokat, amelyek a természetes számok halmazával ekvivalensek $\aleph_0$ (vagy C_0) számosságú halmazoknak nevezzük. Gyakran használjuk a „**megszámlálhatóan végtelen számosságú**” kifejezést is a C_0 számosságú halmazokra.

47. Definíció

Ha egy halmaz véges, vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú, akkor **megszámlálható halmaznak** nevezzük.

A fenti tétel általánosítása a következő:

16. Tétel

Megszámlálható sok megszámlálható számosságú halmaz uniója is megszámlálható.

17. Tétel

Megszámlálható halmaz minden részhalmaza megszámlálható.

18. Tétel

A $(0,1)$ intervallumba eső valós számok halmaza nem $\aleph_0$ számosságú.

Bizonyítás

Az **indirekt bizonyítás** technikáját választjuk. Tegyük fel, hogy a tétel állítása hamis, azaz a $(0,1)$ intervallumba eső számok halmaza $\aleph_0$ számosságú. Ebben az esetben – mint ahogyan azt az előző bizonyítások esetében tettük – ennek a halmaznak az elemei felindexelhetők. Ezt feltételezve az alábbi táblázatba felírhatjuk az **összes** olyan valós számot, amelyik a kérdéses intervallumba esik.

$$\begin{aligned}s_1 &= 0, a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3} \dots a_{1,n} \dots \\s_2 &= 0, a_{2,1} a_{2,2} a_{2,3} \dots a_{2,n} \dots \\&\vdots \\s_i &= 0, a_{i,1} a_{i,2} a_{i,3} \dots a_{i,n} \dots \\&\vdots\end{aligned}$$

Minden, a $(0,1)$ intervallumba eső szám a fenti alakú, ahol az a_{ij} -k a $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ számjegyek valamelyikét jelölik.

Azt fogjuk belátni, hogy nem írhatjuk fel ilyen módon az intervallum összes számát, mert mindig megadhatunk olyan – a $(0,1)$ intervallumba eső számot –, amely a felírásban nem szerepel. Egy ilyen szám s^* szám konstruálása a következő módon történik:

Képezzük az $s^* = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots$ szám tizedes jegyeit a következő módon:

Legyen

$$b_1 = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_{1,1} \neq 1 \\ 5, & \text{ha } a_{1,1} = 1 \end{cases}$$

Ha a fenti módon választjuk meg a b_1 -et, akkor biztos, hogy $b_1 \neq a_{1,1}$ teljesülni fog. A célunk az volt, hogy a megkonstruált s^* szám különbözzék a sorozatban felírt s_1 számtól. A fenti definíció szerint biztosan különböznek, mert **legalább** az első tizedes jegyükben különböznek egymástól.

Hasonló módon állítjuk elő az s^* szám második tizedes jegyét.

Legyen

$$b_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_{2,2} \neq 1 \\ 5, & \text{ha } a_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Az s^* szám második tizedes jegye biztosan különbözik az s_2 számtól, mert **legalább** a második tizedes jegyükben különböznek.

Általában, a b_k számot az alábbiak szerint képezzük.

Legyen

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_{k,k} \neq 1 \\ 5, & \text{ha } a_{k,k} = 1 \end{cases}$$

A fenti módon konstruált $s^* = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots$ szám biztosan különbözik mindegyik s_i számtól, legalább annak az i -edik tizedes jegyében.

A fentiek azt bizonyítják, hogy a $(0,1)$ intervallumba eső számok halmazát nem sorszámozhatjuk fel, ebből pedig az következik, hogy nem létesíthető bijektív leképezés a természetes számok halmaza és a $(0,1)$ intervallumba eső valós számok halmaza között.

Azaz, felhasználva az $\aleph_0$ számosság definícióját, a kérdéses halmaz nem tartozik ebbe a számossági osztályba.



Megjegyzés

A fenti bizonyítást Cantor adta, és a fentiekben használt technika – az ún. átlós módszer – gyakran alkalmazott technika. Az a tény, hogy „többfajta” végtelen létezik alapjaiban formálta át a matematika világát. Gyakorlatilag G. Cantor dolgozta ki a halmazelméletet, sőt az elméletrendszer több fontos tételét is Ő bizonyította be.



Született: 1845. március 3, Szentpétervár, Oroszország

Meghalt: 1918. január 6. Halle, Németország

Az előző tételünk fontos folyománya a következő:

19. Tétel

A valós számok halmaza nem megszámlálható számosságú

Bizonyítás

Ha megszámlálható számosságú lenne, akkor – egy előző tételünk alapján – annak minden részhalmaza is az lenne. Ennek viszont ellentmond az, hogy a $(0,1)$ intervallum, amely valódi része a valós számok halmazának nem megszámlálható.



Ebből azonnal következik, hogy

20. Tétel

Az irracionális számok halmaza nem megszámlálható számosságú.

Bizonyítás

A valós számok $\mathbf{R}$ halmaza nem más, mint a racionális és az irracionális számok uniója. Ha az irracionális számok halmaza megszámlálható lenne, akkor ezt „unióztatva” a megszámlálható racionális számok halmazával, szintén megszámlálható halmazhoz jutnánk. Ez viszont ellentmond az előző tételünknek.

48. Definíció

Azokat a halmazokat, amelyek a valós számok halmazával ekvivalensek kontinuum számosságú vagy más néven $\aleph_1$ (vagy C_1) számosságú halmazoknak nevezzük.

A fentieket összefoglalva felsorolunk néhány nevezetes halmazt, és megadjuk, hogy melyik számossági osztályba esnek.

$\aleph_0$ vagy C_0 osztály	$\aleph_1$ vagy C_1 osztály
Természetes számok halmaza	Valós számok halmaza
Racionális számok halmaza	Irracionális számok halmaza
Egészszámok halmaza	Sík pontjainak halmaza

Sík egész-koordinátájú rácsponthainak a halmaza	Az $[a,b]$ felett definiálható folytonos függvények halmaza
---	---

171.4.2 Számosságok rendezése

Természetes módon merülhet fel a kérdés, hogy a végtelen halmazok között használhatjuk-e a véges halmazok esetében megszokott „kisebb”, „nagyobb” fogalmakat a számosságok összehasonlításakor.

49. Definíció

H számossága (határozottan) kisebb mint K számossága, $|H| < |K|$, ha H ekvivalens K valamely részhalmazával, de a K halmazzal nem.

Megjegyzés

A fenti definíciónak megadhatjuk az ekvivalens átfogalmazását is:

H számossága kisebb mint K számossága, $|H| < |K|$, ha létezik φ injekció: $H \rightarrow K$, de nem létezik φ bijekció: $H \rightarrow K$.

50. Definíció

$|H| \leq |K|$ ha $|H| < |K|$ vagy $|H| = |K|$.

54. Tétel

A számosságok között definiált $\leq$ reláció, rendezési reláció.

Bizonyítás

Egy relációt akkor nevezünk rendezési relációnak, ha az reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

A fenti definícióból a reflexivitás azonnal következik, mert az identikus leképezés bijekció.

A tranzitivitás azért igaz, mert injektív leképezések szorzata injektív.

Az antiszimmetria belátása nehezebb, mi nem bizonyítjuk, de megemlíjtük, hogy ez az ún. Cantor-Bernstein-tétel, amelyet a magyar König Gyula (1849-1913) is bebizonyított, gráfokat használva a bizonyítás során.



Nem bizonyítjuk az alábbi tételt sem:

22. Tétel

Bármely – nem üres – H halmaz esetében $|H| < |P(H)|$.

Megjegyzés

A tétel azt mondja ki, hogy – amennyiben a véges halmazok esetében megszokott „kisebb”, „nagyobb” fogalmakat használjuk, akkor elmondhatjuk, hogy minden halmaznál van nagyobb számosságú halmaz.

Érdekességként említjük meg az 1884-ben felvetett – és csak 1963-ban részlegesen megoldott – problémát, amelyet kontinuum hipotézisnek nevezünk. A kérdés az, hogy van-e olyan halmaz, amelynek a számossága nagyobb, mint $\aleph_0$, de kisebb mint $\aleph_1$? Cantor azt a sejtést fogalmazta meg, hogy nincs ilyen halmaz.

171.4.3 Ellenőrző kérdések, feladatok

1. Mit nevezünk végtelen halmaznak?
2. Bizonyítsa be, hogy van végtelen halmaz!
3. Mikor nevezünk két halmazt ekvivalensnek?
4. Mutassa meg, hogy az 5-el osztható természetes számok halmaza ekvivalens az összes természetes számot tartalmazó $\mathbb{N}$ halmazzal!
5. Vegyen el a természetes számok halmazából végtelen sok elemet úgy, hogy a maradék ekvivalens legyen az $\mathbb{N}$ -nel!
6. Vegyen el a természetes számok halmazából végtelen sok elemet úgy, hogy a maradék ne legyen ekvivalens az $\mathbb{N}$ -nel!
7. Bizonyítsa be, hogy a pozitív racionális számok halmaza, ekvivalens az $\mathbb{N}$ -nel!
8. Bizonyítsa be, hogy a sík egész-koordinátájú rádspontjainak a halmaza ekvivalens az $\mathbb{N}$ -nel!
9. Melyek az $\aleph_0$ számosságú halmazok?
10. Melyek az $\aleph_1$ számosságú halmazok?
11. Van-e olyan végtelen halmaz, amelyik nem ekvivalens $\mathbb{N}$ -nel?
12. Ábrázolja a természetes számokat, egész számokat, racionális számokat, irracionális számokat, valós számokat egy közös Venn-diagramban!

5. TÉMA

Absztrakt algebra elemei

171.5.1 Bevezetés

51. Definíció

Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz. A $\varphi : H \times H \rightarrow H$ leképezést a H halmazon értelmezett kétváltozós műveletnek nevezzük.

Megjegyzés

1. A kétváltozós művelethez hasonlóan definiálható az egyváltozós és többváltozós művelet fogalma is, az előbbi a $\varphi : H \rightarrow H$ az utóbbit a $\varphi : H^n \rightarrow H$ definiálja.
2. A művelet fogalma szorosan kapcsolódik az „algebrai zárttság” fogalmához. Ez utóbbi azt fejezi ki, hogy a műveletben résztvevő elemek és a művelet eredménye ugyanabban a halmazban találhatók.
3. Tekintsük a természetes számok halmazát. Ezen a halmazon sem a kivonás, sem a számtani közép képzése nem műveletek. Adjunk példát arra, hogy miért! Ugyanezen a halmazon a szorzás és az összeadás művelet.
4. A $\varphi : H \times H \rightarrow H$ műveletet a továbbiakban egyszerűbben jelöljük. A $\varphi(x,y) = z$ -t röviden az $x \circ y = z$ alakban fogjuk megadni, ahol a $\circ$ egy tetszőleges műveleti jel, amelyet sok esetben a $*, \oplus, +, \otimes, \bullet$ jelek valamelyike helyettesít.

Példák műveletekre

1. Metszetképzés $P(H)$ -n.
2. Unióképzés $P(H)$ -n.
3. Összeadás a páros számok halmazán.
4. Szorzás a páratlan számok halmazán.
5. Komplementer képzés $P(H)$ -n.
6. Reciprok képzés a $\mathbb{Q} \setminus 0$ halmazon.

171.5.2 Műveleti tulajdonságok

A művelet fogalma rendkívül általános abban az értelemben, hogy függetlenül a konkrét halmazelemektől azonos – a műveletet magát jellemző – tulajdonságokat mutathatunk ki. Ezek a műveleti tulajdonságok adnak majd lehetőséget arra, hogy – absztrakt algebrai szempontból – azonos struktúrának tekinthessük a tengelyes tükrözéseket, egy nyelv elemeit vagy egy kristályrács szerkezetét.

52. Definíció

Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz. A $\varphi : H \times H \rightarrow H$ egy a H halmazon értelmezett kétváltozós művelet, amelyet a $\circ$ jel rövidít. A művelet

Asszociatív ha $\forall x,y,z \in H$ esetén $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

Kommutatív, ha $\forall x,y \in H$ esetén $x \circ y = y \circ x$.

Idempotens, ha $\forall x \in H$ esetén $x \circ x = x$.

Matematikai értelemben struktúrának fogunk nevezni minden olyan halmazt, amelyen értelmezett valamilyen művelet. Egy struktúra tehát nem más, mint egy nem üres halmaz és a halmazon értelmezett művelet vagy műveletek. A jelölésben fel fogjuk tüntetni a kérdéses halmazt és a művelet szimbólumát.

Példák

1. $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ Természetes számok halmazán az összeadás.
2. $\langle \mathbb{R}; +, \cdot \rangle$ Valós számok halmazán az összeadás és a szorzás.
3. $\langle P(H); \cup, \cap \rangle$ A H hatványhalmazán a metszet és az unió.
4. $\langle \Phi(H); \circ \rangle$ A H összes transzformációjának a halmazán a leképezések szorzása.
5. $\langle S; \oplus \rangle$ Egy adott véges ábécé elemeiből képzett összes véges hosszú jelsorozatok halmazán a konkatenáció művelete.

Mint láthatjuk a fenti példákból egy struktúra elemei nem feltétlenül számok vagy matematikai objektumok. Bizonyos struktúrák speciális, sajátos tulajdonságokat felmutató elemekkel rendelkeznek. Például az egészszámok halmazán bármelyik számot is megszorozzuk a 0-val, akkor az eredmény a zérus lesz, ha viszont az 1-et tekintjük, akkor ezzel az elemmel szorozva a művelet eredménye a megszorozott szám lesz. Ez a megfigyelés motiválta az alábbi definíciókat:

53. Definíció

Legyen $\langle H; * \rangle$ egy algebrai struktúra. Ha az $u \in H$ elem olyan, hogy $\forall x \in H$ esetén $u * x = x * u = x$ teljesül, akkor az u elemet a struktúra **egységelemének** nevezzük.

54. Definíció

Legyen $\langle H; * \rangle$ egy algebrai struktúra. Ha az $u \in H$ elem olyan, hogy $\forall x \in H$ esetén $u * x = x * u = u$ teljesül, akkor az u elemet a struktúra **zérus elemének** nevezzük.

Nem minden struktúra rendelkezik egység- vagy zérus elemmel, de ha igen, akkor ezeknek az elemeknek unicitása van. Ez azt jelenti, hogy egy struktúra nem rendelkezhet egynél több egység- vagy zérus elemmel.

55. Definíció

Legyen $\langle H; \circ \rangle$ egy algebrai struktúra. Ha $\forall x \in H$ elemhez $\exists x^* \in H$, hogy $x^* \circ x = x \circ x^* = e$ teljesül, ahol az e a struktúra egységeleme, akkor a $\circ$ műveletet **invertálhatónak** az x^* elemet pedig az x elem **inverzének** nevezzük.

A bevezetőben már említettük, hogy egymástól nagyon különböző elemeket tartalmazó struktúrák azonos tulajdonságokkal rendelkezhetnek. Ez utóbbi tény motiválta azokat a vizsgálatokat, amelyek az azonos tulajdonságokkal rendelkező struktúrákra irányultak. Az alábbiakban felsoroljuk a legfontosabb struktúra-típusokat.

171.5.3 Félcsoport

56. Definíció

A $\langle H; \circ \rangle$ struktúra **félcsoport**, ha a $\circ$ művelet asszociatív.

171.5.4 Csoport

57. Definíció

A $\langle H; \circ \rangle$ struktúra **csoport**, ha a $\circ$ művelet asszociatív és invertálható.

58. Definíció

A $\langle H; \circ \rangle$ struktúra **félháló**, ha a $\circ$ művelet asszociatív, kommutatív és idempotens.

59. Definíció

A $\langle H; \circ \rangle$ struktúra **Abel-csoport**, ha a $\circ$ művelet asszociatív, invertálható és kommutatív.

171.5.5 Gyűrű**60. Definíció**

Legyen $\langle H; +, \circ \rangle$ kétműveletes algebrai struktúra. A $\circ$ művelet **disztributív** az $+$ műveletére nézve, ha $\forall x, y, z \in H$ esetén $(x + y) \circ z = (x \circ z) + (y \circ z)$.

61. Definíció

A $\langle H; +, \circ \rangle$ struktúra **gyűrű**, ha $\langle H; + \rangle$ Abel-csoport és $\langle H; \circ \rangle$ félcsoport, továbbá a $\circ$ disztributív az $+$ -ra nézve.

171.5.6 Háló**62. Definíció**

Legyen $\langle H; +, \circ \rangle$ egy kétműveletes algebrai struktúra. A $\circ$ művelet **abszorbtív** az $+$ műveletre nézve, ha $\forall x, y \in H$ esetén $x \circ (x + y) = x$.

63. Definíció

A $\langle H; +, \circ \rangle$ struktúra **háló**, ha $\langle H; + \rangle$ és $\langle H; \circ \rangle$ félháló, továbbá a két művelet kölcsönösen abszorbtív a másikra nézve.

171.5.7 Test**64. Definíció**

Legyen H legalább kételemű halmaz. A $\langle H; +, \circ \rangle$ struktúra **test**, ha $\langle H; + \rangle$ Abel-csoport, $\langle H \setminus \{0\}; \circ \rangle$ Abel-csoport, továbbá a $\circ$ művelet disztributív az $+$ -ra nézve.

171.5.8 Algebrai struktúrák leképezései

Az algebrai struktúrák vizsgálatakor fontos kérdés, hogy két algebrai struktúra milyen viszonyban van egymással. Mivel ezek az objektumok egyrészt halmazok, ezért értelmes a kérdés, hogy ha egy algebrai struktúrát leképezünk, akkor annak képében hogyan alakulnak a műveleti tulajdonságok.

65. Definíció

Jelöljön $\langle H; \circ \rangle$ és $\langle K; * \rangle$ két egyműveletes algebrai struktúrát. A $\varphi : H \rightarrow K$ leképezés **homomorfizmus**, ha $\forall x, y \in H$ esetén $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.

Megjegyzés

1. Két algebrai struktúrát homomorfnak nevezünk, ha létezik közöttük homomorf leképezés.
2. A homomorfizmus definíciójának lényege az, hogy a leképezés és a művelet végrehajtásának a sorrendje felcserélhető.

66. Definíció

Jelöljön $\langle H; \circ \rangle$ és $\langle K; * \rangle$ két egyműveletes algebrai struktúrát. A $\varphi : H \rightarrow K$ leképezés **izomorfizmus**, ha φ bijekció és $\forall x, y \in H$ esetén $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.

Megjegyzés

1. Két algebrai struktúrát izomorfoknak nevezünk egymással, ha létezik közöttük izomorf leképezés.
2. Egymással izomorf struktúrák esetében a két alaphalmaznak ugyanolyan sok eleme van.
3. Ha a $\langle H; \circ \rangle$ és a $\langle K; * \rangle$ izomorfak, akkor azt a következő módon jelöljük: $\langle H; \circ \rangle \cong \langle K; * \rangle$.

Legyen Ω algebrai struktúráknak egy elegendően bő halmaza. Definiáljunk az Ω halmazon egy binér relációt, a következő módon: két struktúra legyen relációban egymással, ha azok izomorfak. Formálisan: $\sigma \subseteq \Omega \times \Omega$, továbbá $\langle H; \circ \rangle \sigma \langle K; * \rangle$, akkor és csakis akkor, ha $\langle H; \circ \rangle \cong \langle K; * \rangle$.

23. Tétel

A fent definiált σ reláció ekvivalencia reláció.

Bizonyítás

A tételt bizonyítását feladatként kell belátnia.



171.5.9 Faktorstruktúra

67. Definíció

Legyen $\langle H; \circ \rangle$ egy algebrai struktúra, továbbá a φ a H halmazon értelmezett reláció. A φ relációt **kongruencia reláció**nak – vagy röviden kongruenciának – nevezzük, ha a reláció ekvivalencia reláció, továbbá $\forall a, b, c, d \in H$ esetén, ha $(a, b) \in \varphi$ továbbá $(c, d) \in \varphi$, akkor $(a \circ c, b \circ d) \in \varphi$ is teljesül.

A fenti definíció ad lehetőséget arra, hogy egy struktúrához megkonstruáljuk annak faktorstruktúráját. A konstrukció lépései a következők.

1. Legyen adott a $\langle H; \circ \rangle$ algebrai struktúra és a rajta értelmezett φ kongruencia reláció.
2. Mivel φ ekvivalencia reláció, ezért a halmazt ekvivalencia-osztályokra bontja. Jelölje az ekvivalencia-osztályok halmazát a H / φ .
3. A H / φ elemei között – tehát az ekvivalencia osztályok között! – műveletet definiálunk, azaz bármely két ekvivalencia osztályhoz hozzárendelünk egyértelmű módon egy harmadik ekvivalencia-osztályt. Legyen E_α és E_β két ekvivalencia-osztály, a és b pedig ezek reprezentáns elemei, azaz $a \in E_\alpha$ és $b \in E_\beta$. Legyen $c = a \circ b$! Ez előbbi két ekvivalencia-osztályhoz az E_γ ekvivalencia-osztályt rendeljük hozzá, ahol $c \in E_\gamma$ teljesül.
4. Ha ez a hozzárendelés nem függ a reprezentánsok választásától – ezt a következő tételben látjuk be –, akkor műveletet definiáltunk az ekvivalencia-

osztályok halmazán, a H / φ halmazon. Az így kapott $\langle H / \varphi; \circ \rangle$ struktúrát a $\langle H; \circ \rangle$ struktúra faktorstruktúrájának nevezzük.

24. Tétel

A 4. pontban definiált hozzárendelés nem függ a reprezentánsok választásától.

Bizonyítás

Legyen E_α és E_β két ekvivalencia-osztály a és b , illetve a^* és b^* pedig ezek egymástól különböző reprezentáns elemei, azaz $a, a^* \in E_\alpha$ és $b, b^* \in E_\beta$. Legyen $c = a \circ b$ és $c^* = a^* \circ b^*$! A két – E_α és E_β – ekvivalencia-osztályhoz az E_γ ekvivalencia-osztályt rendeljük hozzá, ahol $c \in E_\gamma$ teljesül. Azt kell belátnunk, hogy $c^* \in E_\gamma$ szintén teljesül, azaz mindegy, hogy milyen reprezentánsokat választunk ki az E_α és E_β osztályokból, minden esetben ugyanazt az E_γ osztályt rendeli a megfeleltetés ez előbbi két osztályhoz. Figyelembe véve a definíciónak a második részét, mivel $(a, a^*) \in \varphi$ továbbá $(b, b^*) \in \varphi$, ezért $(a \circ b, a^* \circ b^*) \in \varphi$ is teljesül. Azaz, $(c, c^*) \in \varphi$.



171.5.10 A természetes számok konstruálása

Most jött el annak az ideje, hogy a számokat, azok közül is a legegyszerűbbeket megkonstruáljuk. Mit jelent az, hogy 6? Miért igaz, hogy $2+2=4$? Ráadásul a második matematika kurzuson már a számítógépek által is használt számítási módszereket, technikákat kell megtanulnunk. Egyszóval nem kerülhetjük ki azt, hogy bevezessük a szám fogalmát. A konstrukcióhoz csak az üres halmaz létezését kell elfogadnunk, ennek egzisztenciája pedig biztosított a számok létezése nélkül is. Például tekintsük azon p predikátumok halmazát, amelyek esetében $|p \wedge \neg p| = 1$! Ez a halmaz üres, jelöljük ezt a szokásos $\emptyset$ szimbólummal! Egy rekurzív definícióval végtelen sok halmazt fogunk definiálni.

Legyen

$$H_0 = \emptyset$$

$$H_1 = \{\emptyset\}$$

$$H_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$H_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$H_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

:

egy halmazsorozat, majd tekintsük a halmazoknak egy olyan Θ osztályát, amely **legalább** a fenti halmazok mindegyikét tartalmazza. A „legalább” kifejezést azért használtuk, mert tetszőleges más halmazokat is tartalmazhat ez az osztály. A Θ osztályon definiálunk egy relációt. A $H, K \in \Theta$ halmazok legyenek relációban egymással akkor és csak akkor, ha megadható közöttük $\varphi_{\text{bijekció}} : H \rightarrow K$. Azaz, ha azonos sok elemük van.

25. Tétel

A fenti reláció ekvivalencia reláció a Θ osztályon.

Bizonyítás

Reflexivitás: $\varphi_{\text{identikus}} : H \rightarrow H$ bijekció.

Szimmetria: Ha létezik $\varphi_{\text{bijekció}} : H \rightarrow K$, akkor ennek inverze a $\varphi^{-1} : K \rightarrow H$ szintén bijekció.

Tranzitivitás: Ha léteznek a $\varphi_{\text{bijekció}} : H \rightarrow K$ és $\psi_{\text{bijekció}} : K \rightarrow L$, akkor ezek szorzata a $\psi \circ \varphi : H \rightarrow L$ szintén bijekció.



A fentiek alapján a Θ szétesik ekvivalencia-osztályokra, és egy osztályban az azonos sok elemet tartalmazó halmazok vannak. Azt az ekvivalencia osztályt, amelyik a H_0 halmazt tartalmazza szimbolizáljuk a 0 jellel, azt az osztályt, amelyik a H_1 -et tartalmazza jelölje az 1-es szimbólum, hasonlóan folytatva, n azt az osztályt fogja jelölni, amelyik a H_n halmazt tartalmazza.

A fentiek alapján fogalmazható meg az alábbi

26. Tétel

Véges halmazok számosságait természetes számoknak nevezzük.

A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra, de a műveletek nem invertálhatók. Az $\mathbb{N}$ bővítését úgy kell megvalósítani, hogy az ott definiált műveletnek az $\mathbb{N}$ -re történő megszorítása azonos legyen az eredeti művelettel. Így jutunk el az egészszámok $\mathbb{Z}$ halmazához, amelyen az összeadás invertálható, de a szorzás nem. A további bővítés során jutunk el a racionális számok halmazához, amelyen már a szorzás is invertálható, ha a 0 elemtől eltekintünk. Ez a racionális számok teste. Bizonyos mérési problémák és a négyzetgyökvonás miatt a racionális számok teste szűk. Így jutunk el a valós számok testéhez. Ez utóbbi konstrukciót nem ismertetjük. A további bővítéssel a következő kurzuson foglalkozunk, ahol megkonstruáljuk a komplex számok testét.

Programozandó feladatok

Logika

1. Írjon olyan programot C-nyelven, amelyik a p, q, r, s logikai változók értékeit a billentyűzetről bekéri, és ellenőrzi, hogy a megadott értékek a $\{0,1\}$ halmazból kerültek-e ki, majd kiszámítja az alábbi formulák logikai értékét: $p \vee (r \leftrightarrow q) \wedge (s \vee \neg p)$, $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r \vee \neg s)$, $p \rightarrow (p \vee q)$ és azt megjeleníti a képernyőn!
2. Írjon olyan programot C-nyelven, amelyik eldönti, hogy az alábbi következtetési séma helye-e vagy sem!

Ha megnyerjük a választásokat, akkor vagy koalícióra lépünk a kékkel vagy koalícióra lépünk a zöldekkel.

Ha nem nyerjük meg a választásokat, akkor a pirosakkal nem lépünk koalícióra.

Nem léptünk koalícióra a pirosakkal.

Megnyertük a választásokat.

Halmazok

1. Írjon olyan programot C-nyelven, amelyik a billentyűzetről bekéri két halmaz (a H és K halmazokról lesz szó) elemeit, majd egy menüpont választása után kilistázza azokat a képernyőre. (Ha már tudja használni a dinamikus változókat, akkor láncolt listára fűzze az elemeket, ha nem, akkor tömbökben tárolja azokat. Ügyeljen arra, hogy egy halmaznak **nem lehet két azonos eleme!**)
2. Az előző pontban specifikált feladatot bővítjük tovább. Menüpontból választhatóan, tehát opcionálisan, listázza ki a program a $H \cup K$, $H \cap K$, $H \setminus K$, $H \times K$, halmazok elemeit!

Relációk

1. Írjon olyan programot C-nyelven, amelyik a billentyűzetről bekéri egy H halmaz elemeit, majd miután elkészíti a $H \times H$ Descartes-szorzatot az alábbi feladatokat hajtja végre: Véletlenszerűen leválogat véletlen-sok elempárt a szorzatból (így tehát egy relációt határozunk meg véletlenszerűen). Listázza a reláció elempárait (esetleg vizuálisan, gráffal, rácspontokkal ábrázolja azt, de ez nem kötelező!), majd rendre eldönti, hogy a kapott reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, antiszimmetrikus e vagy sem.
2. Írjon olyan programot C-nyelven, amelyik billentyűzetről bekéri a H és K halmazok elemeit, majd miután elkészíti a $H \times K$ Descartes-szorzatot az alábbi feladatokat hajtja végre: Véletlenszerűen leválogat véletlen-sok elempárt a szorzatból (így tehát egy relációt határozunk meg véletlenszerűen). Listázza a reláció elempárait (esetleg vizuálisan, gráffal, rácspontokkal ábrázolja azt, de ez nem kötelező!), majd eldönti, hogy a kapott reláció leképezés-e. Ha igen, akkor megvizsgálja az injektivitást és a szürjektivitást.

Szofi Press Publishing

www.szofipress.com // www.facebook.com/SzofiPressPublishing

