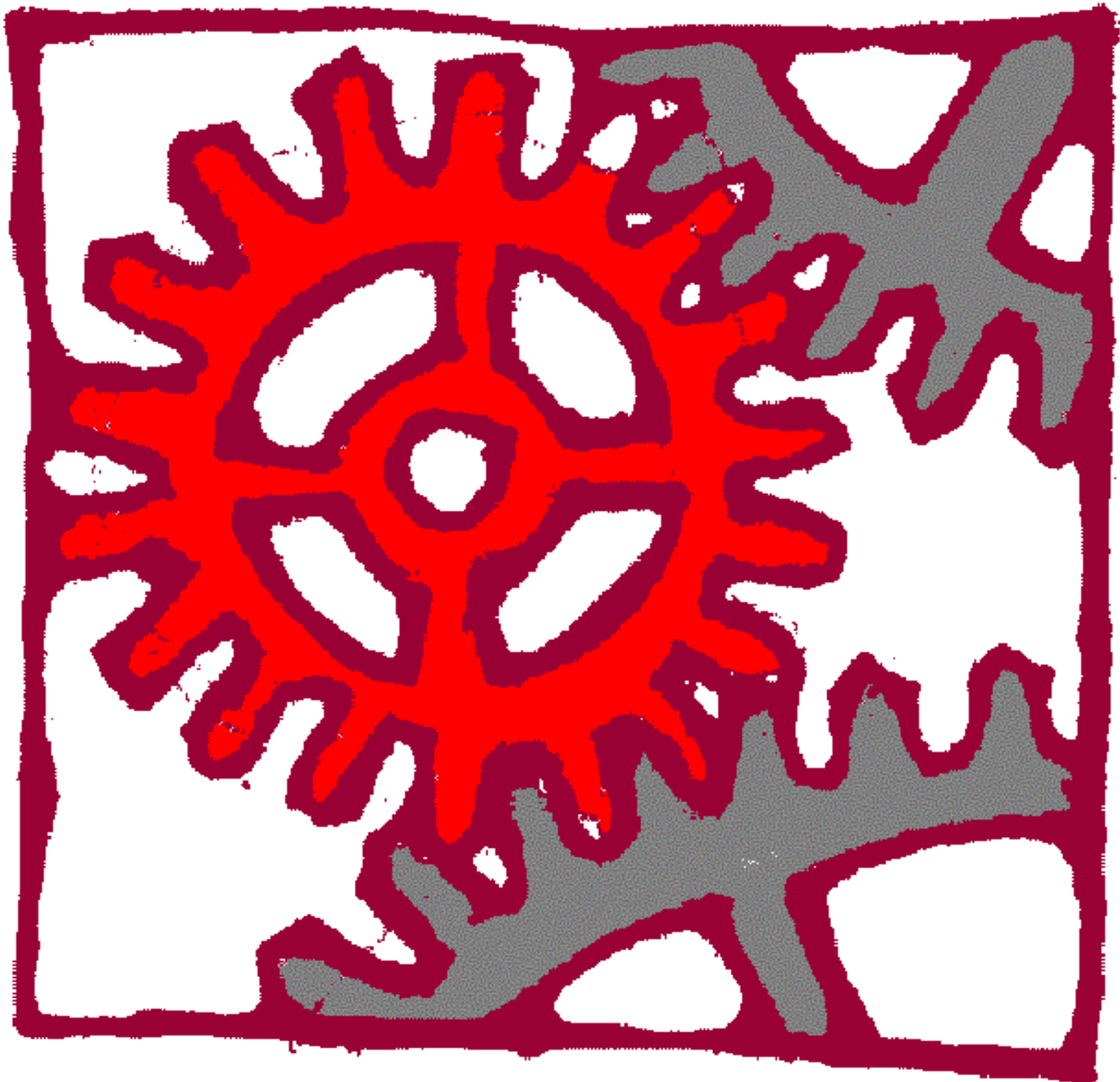




# **MATEMATIKA B.**

## **Alapvetések informatikusok számára**

# Matematika B

## *tankönyv*

Technical Code: 172 / DEV\_092 / Version: 1.1

**Szofi's Software Engineering Course for  
CIT (Certified Information Technologist)  
degree**

## Tartalomjegyzék

|                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Bevezetés .....</b>                                                      | <b>5</b>  |
| A jegyzet felépítése .....                                                  | 5         |
| Néhány megjegyzés a tananyagról.....                                        | 5         |
| <b>1. TÉMA Számelmélet elemei .....</b>                                     | <b>6</b>  |
| 172.1.1 Maradékos osztás, oszthatóság.....                                  | 6         |
| 172.1.2 Kongruencia (kiegészítő anyag).....                                 | 8         |
| 172.1.3 Prímszámok .....                                                    | 9         |
| 172.1.4 Ellenőrző kérdések, feladatok .....                                 | 12        |
| <b>2. TÉMA Matematikai analízis elemei.....</b>                             | <b>13</b> |
| 172.2.1 Metrikus terek .....                                                | 13        |
| 172.2.2 Sorozatok metrikus térben .....                                     | 14        |
| 172.2.3 Monoton és korlátos sorozatok .....                                 | 15        |
| 172.2.4 Ellenőrző kérdések .....                                            | 17        |
| 172.2.5 Cauchy-féle konvergencia kritérium.....                             | 18        |
| 172.2.6 Konvergens sorozatok tulajdonságai .....                            | 18        |
| 172.2.7 Függvények .....                                                    | 19        |
| 172.2.7.1 Függvény határértéke és folytonossága .....                       | 19        |
| 172.2.7.2 Folytonos függvények tulajdonságai.....                           | 22        |
| 172.2.8 Ellenőrző kérdések .....                                            | 23        |
| <b>3. TÉMA Komplex számok.....</b>                                          | <b>24</b> |
| 172.3.1 Bevezetés.....                                                      | 24        |
| 172.3.2 Komplex számok konstrukciója.....                                   | 24        |
| 172.3.3 A komplex számok hagyományos (algebrai) alakja .....                | 25        |
| 172.3.4 A komplex számok trigonometrikus alakja .....                       | 25        |
| 172.3.5 Komplex szám abszolút értéke .....                                  | 26        |
| 172.3.6 Gyökvonás komplex számból .....                                     | 27        |
| 172.3.7 Ellenőrző kérdések, feladatok.....                                  | 29        |
| <b>4. TÉMA Polinomok .....</b>                                              | <b>30</b> |
| 172.4.1 Polinomok, mint algebrai kifejezések .....                          | 30        |
| 172.4.2 Polinomok, mint függvények .....                                    | 31        |
| 172.4.3 Lagrange-féle interpoláció .....                                    | 31        |
| <b>5. TÉMA Lineáris algebra elemei .....</b>                                | <b>33</b> |
| 172.5.1 Lineáris tér.....                                                   | 33        |
| 172.5.2 Lineáris kombináció .....                                           | 34        |
| 172.5.3 Mátrixok.....                                                       | 34        |
| 172.5.4 Mátrixaritmetika .....                                              | 36        |
| 172.5.5 Egyenletrendszerek .....                                            | 37        |
| 172.5.6 Gauss-elimináció .....                                              | 39        |
| 172.5.7 Lineáris egyenletrendszer megoldása determinánsok segítségével..... | 40        |

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| 172.5.8 Forгатó és tükřöző mátrixok .....                  | 42        |
| 172.5.9 Lineáris transzformációk .....                     | 42        |
| 172.5.10 Feladatok.....                                    | 44        |
| <b>6. TÉMA Kombinatorika.....</b>                          | <b>45</b> |
| 172.6.1 Permutáció .....                                   | 45        |
| 172.6.2 Kombináció.....                                    | 46        |
| 172.6.3 Variáció .....                                     | 46        |
| <b>7. TÉMA Valószínűségszámítás alapelemei .....</b>       | <b>48</b> |
| 172.7.1 Valószínűségi mező.....                            | 48        |
| 172.7.2 Eseményalgebra.....                                | 49        |
| 172.7.3 Valószínűségi mérték .....                         | 50        |
| 172.7.4 Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal..... | 50        |
| <b>Programozandó feladatok .....</b>                       | <b>51</b> |

# Bevezetés

## A jegyzet felépítése

A témakörök gyakorlati feladatokat is tartalmaznak, illetve a témakör végén, az adott anyagrészhez kapcsolódó feladatok találhatóak. Ezek segítségével ellenőrizheti, hogy elsajátította-e azokat az ismereteket, amelyeket az adott témakörben tárgyaltunk.

A jegyzet bal oldali lapjai tartalmazzák az elméleti anyagot, a jobb oldalon pedig jegyzetelésre van lehetősége.

## Néhány megjegyzés a tananyagról

A tantárgymodulban tárgyalt ismeretek alapvetően támaszkodnak a „171 Matematika A” tantárgymodulban tárgyaltakra. Számos esetben visszahivatkozunk az ott megtanult ismeretelemekre. Az ebben a modulban tárgyalt anyagrészek a matematika gyakorlati alkalmazásaihoz – és így a számítástechnikához is – nyújtanak segítséget.

Az elméleti fejtegetések után minden esetben gyakorlati feladatokat kell megoldani, sőt, programozási feladatok is tartoznak az anyagrészekhez.

Ismételten felhívjuk a figyelmet a legfontosabbakra.

### **A definíció lényegének a megértése az első és legfontosabb feladat.**

Mindaddig nem szabad „tovább menni”, ameddig egy fogalmat nem értettünk meg. Szinte minden – még a „legabsztraktabbnak” tűnő – definíció mélyén valamilyen egyszerű és természetes gondolat húzódik meg. Ha ezt már látjuk, akkor értjük a fogalmat, ha még nem, akkor „ízlelgessük” tovább a definíciót.

### **A feladatmegoldás problémamegoldás.**

Sok-sok problémát, feladatot oldjunk meg, sőt konstruáljunk feladatokat! Ha képesek vagyunk a feladat „leprogramozására”, akkor értjük a tárgyalt anyagrészt, ha nem, akkor lépünk vissza, és próbáljuk megérteni a fejezetben tárgyaltakat!

### **Ha nem boldogulsz egy feladattal, akkor légy heurisztikus.**

A „heurisztikus”, mint melléknévnek a jelentése „felfedezést szolgáló”. Gyakorlatilag arról van szó, hogy érzéseinkre hagyatkozva – a matematika szigorát időlegesen elhagyva – igyekszünk megsejteni nagyvonalakban a megoldást. Természetesen egy megoldás akkor és csakis akkor korrekt, ha az adott tárgyaláson belül pontos.

Azok a témakörök után, ahol algoritmust is megadunk, hivatkozunk a 213-as kóddal ellátott **Algoritmustár** megfelelő algoritmusára. A hivatkozás formájára példa az alábbi: **213\_2.1**, ahol a 213 az algoritmustárra a 2.1 pedig a konkrét algoritmusra mutat.

# 1. TÉMA

## Számelmélet elemei

A matematikának a számelmélettel foglalkozó része az **egész számok** részletes vizsgálatával foglalkozik. Egyrészt „barátságosak” a vizsgálandó objektumaink, mert ki ne ismerné az egész számokat, másrészt megoldatlan problémák sokasága az, amely rendkívül intenzív kutatások tárgyává tették, és teszik ma is az egész számok halmazát.

A számelmélet alapvető eredményei – és megoldatlan problémái! – az informatika eszköztárába is bevonultak. A különböző **kriptográfiai protokollok** előszeretettel használják fel például azt, amit a prímszámokról tudunk.

A szokásos jelölésektől továbbiakban sem térünk el,  $\mathbb{N}$ , illetve  $\mathbb{Z}$  jelöli a természetes és az egész számok halmazát.

### 172.1.1 Maradékos osztás, oszthatóság

Az egész számok halmazán alapvető az a tény, hogy elvégezhető a **maradékos osztás**. Ezt fejezi ki az alábbi

#### 1. Tétel

**Ha  $a, b \in \mathbb{Z}$  és  $b \neq 0$ , akkor egyértelműen megadható, olyan  $q$  és  $r$  egész számok, amelyekre teljesül, hogy  $a = q \cdot b + r$ , továbbá  $0 \leq r < |b|$ .**

#### Bizonyítás

Vegyünk fel a számegyenest és helyezzük el rajta az  $a$  számot, majd vegyünk fel egy  $|b|$  szakaszt és azt mérjük fel az origótól kiindulva az  $a$  irányába. Két eset lehetséges, vagy van olyan  $q$  egész szám, hogy az előbbi szakaszt ennyiszor felmérve éppen a szakasz végpontja az  $a$  pontra esik, vagy  $q$ -darab felmérés után a szakasz végpontja nem éri el az  $a$ -t, de  $q + 1$  felmérés után már követné azt. Ez utóbbi esetben megadható olyan  $r$  egész szám, amely kielégíti a tétel feltételeit, továbbá,  $a = q \cdot b + r$ .



#### Megjegyzés

1. A fentieket úgy szoktuk mondani, hogy az  $a$ -ban a  $b$  megvan  $q$ -szor és maradék az  $r$ .
2. Nem minden halmazon végezhető el a fentiekben jelzett maradékos osztás.

#### 1. Definíció

Ha  $a, b \in \mathbb{Z}$ , továbbá  $a = q \cdot b$ , akkor azt mondjuk, hogy a  $b$  osztója az  $a$ -nak.

#### Megjegyzések

1. A  $b$  osztója  $a$ -nak tényt úgy jelöljük, hogy  $b|a$ . Más szavakkal: a  $b$  megvan az  $a$ -ban maradék nélkül.
2. Minden számnak van két triviális osztója, nevezetesen az 1 és önmaga. (természetesen azok negatív ellentettje is osztója a számnak).
3. A definíció alapján a zérust bármelyik szám osztja.
4.  $0|0$ !

A második megjegyzés miatt, ha adott két egész szám, akkor biztosan van olyan egész szám, amely mind a kettőnek osztója, hiszen az egység minden számot oszt. Felmerül a

kérdés, hogy amennyiben ezen egységtől különböző közös osztókat keresünk, akkor van-e ilyen?

## 2. Definíció

Ha  $a, b \in \mathbb{Z}$ , továbbá  $b \neq 0$ , akkor ez előbbi számoknak a  $D \in \mathbb{Z}$  a legnagyobb közös osztója, ha

1.  $D|a$  és  $D|b$ , továbbá,
2. ha van olyan  $d$  egész szám, hogy  $d|a$  és  $d|b$ , akkor  $d|D$ .

### Megjegyzés

A legnagyobb közös osztót az  $(a, b)$  jelöli.

Az alábbiakban megadunk egy algoritmust, amely az inputként megadott két számnak, amely közül legalább az egyik nem nulla, outputként visszaadja a legnagyobb közös osztóját<sup>1</sup>.

## 2. Tétel

Legyen  $a, b \in \mathbb{N}$ , továbbá ez előbbi két szám közül legalább az egyik különbözzön nullától. Ekkor megadható olyan algoritmus, amely meghatározza a két szám legnagyobb közös osztóját.

### Bizonyítás

Amennyiben  $a = 0$ , akkor  $(a, b) = a$  nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy a fenti számok egyike sem nulla. Feltehető, hogy az  $a > b$ , hiszen egyenlőség esetén a legnagyobb közös osztó meghatározása nyilvánvaló. Előző tételünk szerint ekkor

$$a = b \cdot q_1 + r_1 \text{ ahol } 0 \leq r_1 < |b|$$

Ha  $r_1 = 0$ , akkor készen vagyunk és a legnagyobb közös osztó a  $b$ , ha nem, akkor  $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$  ahol  $r_2 < r_1$ . Folytassuk az eljárást az  $r_1, r_2$  számokra! Ekkor  $r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$ . Az eljárást általában megfogalmazva

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n.$$

Mivel a maradékok nem negatív számok, és szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak, ezért véges sok lépés után lesz nulla maradékunk. Az utolsó nem nulla maradék a két szám legnagyobb közös osztója.



### Algoritmustár(2.1)

#### Példa az euklideszi algoritmusra.

Adjuk meg a 168-nak és a 48-nek a legnagyobb közös osztóját!

$$168 = 3 \cdot 48 + 24$$

$$48 = 2 \cdot 24 + 0$$

Azaz,  $(168, 48) = 24$ .

Definiáljuk az alábbi relációt

$$\rho = \{(a, b) \mid a|b, a, b \in \mathbb{N}\}!$$

<sup>1</sup> Az algoritmust a nagy görög geometer után euklideszi algoritmusnak nevezik

Visszaemlékezve a relációkról tanultakra, a fenti halmaz elemeit az alábbi módon állítjuk elő:

1. Képezzük az  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  Descartes-szorzatot!
2. Válogassuk le azokat a párokat, ahol a pár első eleme osztja a pár második elemét!

### 3. Tétel

A fenti reláció, rendezési reláció.

#### Bizonyítás

A tétel bizonyítását – gyakorlásként – az olvasóra bízuk.



## 172.1.2 Kongruencia (kiegészítő anyag)

Az oszthatósági kérdések, de egyéb más – az informatikát is érintő – problémák egyszerűbb tárgyalását teszik lehetővé a „kongruensnek lenni” reláció bevezetése. A definíció alapötletét az adja, hogy ha lerögzítünk egy  $m$  természetes számot, akkor vannak olyan természetes számok, amelyek  $m$ -mel osztva ugyanazt a maradékot adják. Például, ha 30-at és a 16-ot 7-el osztjuk a maradék mind a két esetben 2.

### 3. Definíció

$a \equiv b \pmod{m}$  (úgy olvassuk, hogy  $a$  **kongruens**  $b$ -vel, modulo  $m$ ), ha az  $a$  és  $b$  az  $m$ -mel elosztva ugyanazt a maradékot adja.

Tekintsük a természetes számokat, rögzítsünk egy  $m$  természetes számot, majd definiáljunk egy relációt a következő szerint:

$a$  legyen relációban  $b$ -vel, akkor és csakis akkor, ha  $a \equiv b \pmod{m}$ !

### 4. Tétel

A fenti reláció ekvivalencia reláció.

#### Bizonyítás

A tétel bizonyítását – gyakorlásként – az olvasóra bízuk.



### Megjegyzés

1. A fentiek miatt, a természetes számokat a reláció ekvivalencia osztályokra bontja. Egy osztályban (maradék osztálynak is nevezzük) az egymással  $m$ -re nézve kongruens számokat találjuk.
2. Ha az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  egészek olyanok, hogy mindegyikük egy maradék osztályt reprezentál, és minden maradék osztályból szerepel közöttük elem, akkor az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok alkotta rendszert **teljes maradérendszernek** nevezzük modulo  $m$  (tehát az  $m$  -re nézve).
3. A modulo  $m$  maradékosztályok száma (és így a teljes maradérendszer elemeinek a száma)  $m$ .

Az alábbi egyszerű állításokat az olvasó is beláthatja, mert közvetlenül következnek a definícióból.

## 5. Tétel

Ha  $a \equiv b \pmod{m}$  és  $c \equiv d \pmod{m}$  teljesülnek, akkor

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$
- $a^k \equiv b^k \pmod{m}$  ahol  $k \in \mathbf{N}$  is teljesül

A kongruenciák segítségével bonyolultnak tűnő számelméleti problémákat fogalmazhatunk át úgy, hogy a megoldás már könnyen megadható. Kongruenciákra vonatkozó feladatokkal csak a kriptográfiai protokollok ismertetését előkészítő előadásokon tanulunk.

## 172.1.3 Prímszámok

Az **1. Definíció** lehetőséget ad arra, hogy egy halmazt – egy szám osztóinak a halmazát definiáljuk.

## 4. Definíció

Legyen

$$D(a) = \{x | x \text{ osztója } a\text{-nak}\}$$

Azaz,  $D(a)$  az  $a \in \mathbf{Z}$  osztóinak a halmazát jelöli. Mint azt egy fenti megjegyzésünkben említettük ez a halmaz minden esetben legalább egy elemet tartalmaz. De vannak olyan természetes számok, amelyeknek csak a két triviális osztójuk van.

## 5. Definíció

**Prímszámoknak** nevezzük azokat az – egységtől különböző! – természetes számokat, amelyeknek a triviális osztóikon kívül nincs más osztójuk.

## Megjegyzés

- A definíció értelmében az 1 nem prímszám!
- A 2 az egyetlen páros prímszám.
- Ha egy szám nem prím, akkor **összetett számnak** nevezzük.

## 6. Definíció

Ha  $(a, b) = 1$ , akkor  $a$  és  $b$  **relatív príme**k.

Számos érdekes kérdés vethető fel a prímszámokkal kapcsolatban. Ezek közül néhány:

- Hogyan dönthető el egy számról, hogy prím-e vagy sem?
- Hol – milyen eloszlásban – helyezkednek el a prímszámok a számegyenesen?
- Hány darab prímszám van?

## 6. Tétel (Számelmélet alaptétele)

**Minden összetett szám felbontható prímszámok szorzatára. A felbontás – eltekintve a tényezők sorrendjétől – egyértelmű.**

## Bizonyítás

Legyen  $k$  egy összetett szám.

- Legyen  $p_1$  az a legkisebb prímszám, amely  $k$  számot maradék nélkül osztja. Azaz  $k = q \cdot p_1$ . Ha  $q$  prím, akkor készen vagyunk, ugorjunk a 2-es pontra, ha nem, akkor  $k$  helyére a  $q$ -t helyettesítve, ugorjunk az 1. pontra.

2. A  $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$  adja a keresett felbontást.



### Megjegyzés

1. A felbontásban szereplő prímelek közül egy többször is szerepelhet a tényezők között, ezért elegánsabb, de nem lényeges, hogy az alábbi felbontást adjuk meg:

$$k = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_r^{i_r}$$

2. A fenti tétel azt is jelenti, hogy a prímszámok halmaza képes generálni (előállítani) az összes természetes számot.

A fenti tételből már sejthető a válasz arra a kérdésre, hogy hány darab prímelem van a természetes számok halmazában.

### 7. Tétel

**Végtelen sok prímszám van.**

#### Bizonyítás

Indirekt bizonyítunk. Feltesszük a tétel állításának az ellenkezőjét, azaz azt, hogy csak véges sok prímszám van. Tegyük fel, hogy az alábbi felsorolás az összes prímet tartalmazza:

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Állítjuk, hogy a

$$p^* = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

olyan prím, amelyik nincs a fenti felsorolásban. A  $p^*$  egyetlen felsorolt prímmel sem osztható, mert maradékként minden esetben 1-et kapunk. Azaz  $p^*$  prím és nem egyezik meg egyik  $p_i$ -vel sem. Ellentmondásra jutottunk a feltevésével, így a feltevésünk hamis volt.



A fenti tétel szerint az összes prím előállítása nem lehetséges, de az alábbi tétel szerint tetszőlegesen sokat, bár véges sokat, kiválaszthatunk.

### 8. Tétel

**Megadható olyan algoritmus, amelyik előállítja egy adott  $n$ -nél nem nagyobb prímszámok mindegyikét.** (Az algoritmus az „Erathosztenész szitája” elnevezést viseli.)

#### Erathosztenész szitája algoritmus

1. Írjuk fel az  $n$ -ig terjedő természetes számokat!
2. Jelöljük meg a 2-es számot, majd húzzuk ki a 2 többszöröseit a fenti listából!
3. Vegyük az első (legkisebb) eddig meg nem jelölt vagy ki nem húzott számot, annak többszöröseit húzzuk ki, majd jelöljük is meg!
4. Ugorjunk a 3-ra mindaddig, amíg van jelöletlen szám!
5. Listázzuk ki a megjelölt számokat!

Az algoritmus által kilistázott számok az  $n$ -nél nem nagyobb prímszámok lesznek.



A fenti algoritmus kapcsán felmerülhet a kérdés, hogy nem rövidíthetjük-e le a fenti algoritmust? A válasz igenlő, az alábbiakban ezt látjuk be.

**9. Tétel**

Ha  $n = a \cdot b$ , (azaz  $a$  és  $b$  is osztója  $n$ -nek), akkor az  $a$  és  $b$  valamelyikre teljesül, hogy kisebb, mint  $\sqrt{n}$ .

**Bizonyítás**

Legyen tehát  $n = a \cdot b$ ! Tegyük fel, hogy  $a \leq b$ , (ha nem így van, akkor megfordítható a reláció iránya).

Ha  $a \leq b$ , akkor az  $a \cdot b$  számnál kisebbet (vagy egyenlőt) kapunk, ha az  $a \cdot a$  számmal helyettesítjük. Azaz

$$n = a \cdot b \geq a \cdot a = a^2.$$

Amiből azt kapjuk az egyenlőtlenség két oldalából történő négyzetgyökvonás után, hogy

$$\sqrt{n} \geq a.$$

**Megjegyzés**

1. Az  $n = a \cdot b$  kifejezésben szereplő  $a$  és  $b$  számokat **komplementer osztóknak** is nevezzük.
2. Ha  $n$  összetett szám, akkor az 6. Tétel miatt van olyan  $d$  osztója, amelyre  $2 \leq d \leq \sqrt{n}$  teljesül. Ha  $d$  összetett szám, akkor van ilyen (a  $d$  felbontása miatt) prímosztója is.

A fentiek miatt a 8. Tétel algoritmusát úgy élesíthetjük, hogy amennyiben a  $\sqrt{n}$ -nél nem nagyobb prímeket már megtaláltuk, és többszöröseiket „kiszitáltuk”, akkor megállhatunk és az összes meg nem jelölt szám is prím lesz. Figyelembe véve a négyzetgyök függvény viselkedését, nagy  $n$  számok esetében ez jelentős megtakarítást jelent.

**Algoritmustár(2.3)**

## 172.1.4 Ellenőrző kérdések, feladatok

1. Mit jelent az, hogy a maradékos osztás elvégezhető a  $\mathbb{Z}$  halmazon?
2. Adjon példát olyan struktúrára, ahol a maradékos osztás nem végezhető el!
3. Adja meg az oszthatóság definícióját!
4. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az oszthatósági reláció?
5. Ismertesse a legnagyobb közös osztó definícióját! Mi biztosítja azt, hogy bármely két egész esetében a legnagyobb közös osztó származtatható?
6. Ha bármely két számhoz hozzárendeljük a legnagyobb közös osztóját, akkor egy kétváltozós műveletet definiálunk. Elemezze az így létrejövő struktúra tulajdonságait!
7. Ismertesse az Euklideszi algoritmust!
8. Mik azok a prímszámok?
9. Mit mondhatunk a prímszámok halmazának számosságáról?
10. Adjon algoritmust, amelyik prímszámokat állít elő!
11. Mit nevezünk komplementer osztónak?
12. Ismertesse a számelmélet alaptételét, a prímtényezős előállításról!
13. Ismertesse a relatív prímelek fogalmát!
14. Prímszámok-e a relatív prímelek?
15. Számítsa ki a 3456 és a 28 legnagyobb közös osztóját!
16. Adja meg a 123456 prímtényezős előállítását!
17. Adja meg a maradékos osztás definícióját!
18. Adja meg a prímszám fogalmát!
19. Bizonyítsa be a számelmélet alaptételét!

# 2. TÉMA

## Matematikai analízis elemei

Annak ellenére, hogy a halmazokról, a halmazok elemei közötti kapcsolatokról már elég sokat elmondtunk, még nem ejtettünk szót a halmaz elemeinek egymástól való *távolságáról*. De mi is a távolság? Amikor ezt a fogalmat kell definiálnunk, egyrészt teljes a szabadságunk, másrészt definíciónknak illeszkednie kell a konkrét, a „mindennapi életben” megszokott és használt fogalomhoz.

### 172.2.1 Metrikus terek

Legyen adott a  $H$  halmaz, amelynek elemeit pontoknak nevezzük. Tekintsük a

$$(*) \quad \rho: H \times H \rightarrow \mathbb{R}^+$$

leképezést, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1.  $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in H$
2.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in H$
3.  $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$

#### 7. Definíció

A fenti tulajdonságokkal rendelkező függvényt **metrikának** nevezzük.

#### 8. Definíció

Egy  $H$  halmazt és a rajta értelmezett metrikát **metrikus térnek** nevezzük, és  $(H, \rho)$  párral jelöljük.

#### Megjegyzés

1. A metrika által a két ponthoz rendelt számot az  $x$  és  $y$  pont távolságának nevezzük.
2. Vizsgáljuk meg a fenti definícióban szereplő leképezést, a metrikát! Az  $(*)$  azt jelenti, hogy a  $H$  halmaz bármely két eleméhez hozzárendelhetünk egy és csakis egy olyan valós számot, amely nem negatív. Az (1) tulajdonság azt fejezi ki, hogy tetszőleges két pont esetén az  $x$ -nek az  $y$ -től való távolsága azonos  $y$ -nak az  $x$ -től való távolságával. A (2) tulajdonság a közismert háromszög egyenlőtlenség. A (3) tulajdonság azt fejezi ki, hogy két pont távolsága akkor és csakis akkor zérus, ha azok egyenlők.

Tekintsük az alábbi példákat!

1. Ha  $H$  a valós számok halmaza, a metrikát pedig a

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

leképezés szolgáltatja, akkor a számegyenesen megszokott távolságot kapjuk.

2. Legyen  $H = \mathbb{R}^2$  a valós számsík,  $P(x_1, x_2)$  és  $Q(y_1, y_2)$  pedig a sík tetszőleges pontjai. A

$$\rho(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}$$

metrika, amely a közismert Pitagorasz-tétel, a sík megszokott metrikáját adja meg.

3. Legyen  $H = \mathbf{R}^n$ ,  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  és  $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$  pedig a Descartes-szorzat tetszőleges pontjai. A

$$\rho(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

4. metrika, amely a síkon vett távolságfogalom nyilvánvaló kiterjesztése, az Euklideszi tér fogalmát definiálja. A számegegyenes, a sík, a tér rendre egy-, két-, illetve háromdimenziós Euklideszi teret definiálnak.
5. A 3. példában vett  $H = \mathbf{R}^n$ , halmazon nem csak a fenti távolságfogalom definiálható.

Vegyük például a következő leképezést:

$$\rho(P, Q) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Ez is metrika és sok kérdés vizsgálatakor hasznos.

## 172.2.2 Sorozatok metrikus térben

A középiskolákban megismert számsorozat általánosítását jelenti az alábbi

### 9. Definíció

Tetszőleges  $H$  halmaz esetén, az  $S: \mathbf{N} \rightarrow H$  leképezést **végtelen sorozatnak** nevezzük.

### Megjegyzés

1. A sorozatok elemei ismétlődhetnek, akár végtelen sokszor is. Emlékezzünk rá, hogy ezt a halmazok esetében nem engedjük meg.
2. Egy sorozatot többféle módon is megadhatunk. Például úgy, ahogyan az általános iskolában: felsoroljuk a sorozat első néhány elemét, úgy, hogy az elemek képzésének a szabálya nyilvánvaló legyen.
3. Az  $a_n = 1, 3, 5, 7, \dots$  sorozat esetében a felsorolás sugallja, hogy itt a páratlan természetes számok egy felsorolásáról van szó. Ugyanezt a sorozatot képlettel is megadhatjuk, nevezetesen:  $a_n = 2n - 1$ , ahol  $n = 1, 2, 3, \dots$
4. Megemlíjtük még a rekurzív<sup>2</sup> módon történő definíciót is. A fenti sorozatot rekurzív módon az

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2)$$

képlet határozza meg.

### 10. Definíció

A  $(H, \rho)$  metrikus tér azon  $x$  pontjait, amelyre teljesül, hogy

$$\rho(x_0, x) < k$$

$x_0$  középpontú és  $k$  sugarú **nyílt gömbnek** nevezzük, és  $S(x_0, k)$ -val jelöljük.

<sup>2</sup> A rekurzív módszer azt jelenti, hogy a sorozat általános tagjának definiálásakor felhasználjuk a sorozat előző tagjait.

**Megjegyzés**

A fenti definíciót formálisan az  $S(x_0, k) = \{x : x \in H \wedge \rho(x_0, x) < k\}$  kifejezés szolgáltatja. A definíció meglehetősen szemléletes. A számegegyenesen azonos a **nyílt intervallummal**, síkon a **kör**, térben pedig a **gömb** belsejével.

**11. Definíció**

A  $(H, \rho)$  metrikus tér  $a_n$  sorozatának az  $x_0$  **torlódási pontja**, ha az  $x_0$  tetszőlegesen kicsi, de pozitív környezetébe a sorozatnak végtelen sok tagja esik.

**12. Definíció**

A  $(H, \rho)$  metrikus tér  $a_n$  sorozatának az  $x_0$  **konvergencia pontja**, ha az  $x_0$  tetszőlegesen kicsi környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja esik.<sup>3</sup>

Számsorozatok esetében a fenti definíció egybe esik a középiskolában tanult határérték fogalommal. Ez utóbbi definíció ekvivalens átfogalmazása a következő:

**13. Definíció**

A  $(H, \rho)$  metrikus tér  $a_n$  sorozatának az  $x_0$  akkor és csakis akkor **konvergencia pontja**, ha az  $x_0$  tetszőlegesen kicsi, de pozitív  $\varepsilon$  környezetéhez megadható olyan  $n_0$  küszöbindex, hogy a sorozatnak ez előbbi küszöbindexnél nagyobb indexű tagjai már az  $x_0$  pont  $\varepsilon$  sugarú környezetébe esnek.

További ekvivalens átfogalmazás a következő:

**14. Definíció**

A  $(H, \rho)$  metrikus tér  $a_n$  sorozatának az  $x_0$  akkor és csakis akkor **konvergencia pontja**, ha az  $s_n = \rho(x_0, a_n)$  pozitív számokból álló számsorozat a zérushoz konvergál.

**Megjegyzés**

1. A torlódási pont nem feltétlenül eleme a  $H$  halmaznak.
2. Azt, hogy az  $a_n$  sorozat egy  $a$  számhoz konvergál a továbbiakban az  $a_n \rightarrow a$  vagy a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  kifejezéssel fogjuk jelölni.
3. Véges sok tag elvétele illetve hozzá vétele a sorozathoz a konvergencia tényén nem változtat.

**172.2.3 Monoton és korlátos sorozatok**

Ebben a fejezetben a számsorozatok tulajdonságait vizsgáljuk.

**15. Definíció**

Az  $a_n$  sorozat **korlátos**, ha megadható olyan  $K$  szám, hogy a sorozat *minden* tagja esetében teljesül, hogy  $|a_n| \leq K$ .

**Megjegyzés**

1. A definíció általános, metrikus térben vett sorozatok esetében is megadható.

<sup>3</sup> Ha egy sorozatnak van konvergencia pontja, akkor azt mondjuk, hogy konvergens. Használatos még az „ $a_n$  sorozat konvergál az  $x_0$  ponthoz” elnevezés is.

2. Számsorozatok esetében könnyen definiálható az „alulról” és „felülről” való korlátosság is.
3. A definíció tagadása – tehát az, hogy mikor nem korlátos a sorozat – így szól: **Minden**  $K$  számhoz **létezik** olyan eleme az  $a_n$  sorozatnak, hogy  $|a_n| > K$ . Az olvasó vesse ez utóbbi átfogalmazást össze az univerzális és egzisztenciális kvantifikációnál tanult De Morgan azonosságokkal.

Az alábbi tételt nem bizonyítjuk, de bizonyításuk nagyon egyszerű

#### 10. Tétel

**Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos is.**

#### 16. Definíció

Az  $a_n$  sorozat monoton növekszik, ha minden  $n$  esetében  $a_n \leq a_{n+1}$ .

#### Megjegyzés

1. A definíció szerint a monoton növekedő sorozatok esetében az egyre nagyobb indexű tagok nagyobbak vagy egyenlők az őket megelőző társaiknál.
2. Hasonlóképpen definiálható a **monoton csökkenés** fogalma is.
3. **Szigorú monotonitásról** beszélünk, ha a  $\leq$  relációt a  $<$  relációval helyettesítjük.

Rendkívül hasznos tétel az alábbi.

#### 11. Tétel

**Ha az  $a_n$  sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.**

#### Megjegyzés

1. A sorozat konvergens voltából következik a korlátossága (ezt mondja ki a 10. Tétel), de nem következik a monotonitása!
2. A monotonitás általános pontsorozatok esetében nem értelmezhető.

## 172.2.4 Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk metrikának?
2. Milyen tulajdonságokat fogalmaznak meg a metrikus axiómák?
3. A metrika szempontjából van-e jelentősége annak, hogy mik a halmaz elemei?
4. Próbálja meg önállóan definiálni a nyílt gömbi környezet mintájára a zárt intervallumot!
5. Adjon példát olyan halmazra, amelynek az elemei nem rendezhetők sorozatba!
6. Mi a különbség a torlódási pont és a konvergencia pont között?
7. Adjon példát nem korlátos sorozatra!
8. Adjon példát nem monoton sorozatra!
9. (Nehéz!) Adjon példát olyan sorozatra, amelynek több torlódási pontja van, mint ahány eleme a sorozatnak!
10. (Nehéz!) Lássa be, hogy a konvergenciára adott két definíciónk ekvivalens!
11. Adja meg a háromdimenziós Euklideszi tér két tetszőleges pontját, majd számítsa ki azok távolságát!
12. Tekintse a síkon az alábbi távolságfogalmat:  $\rho(P, Q) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ ! Számítsa ki a  $(1, 3)$ ,  $(-5, 9)$  pontok távolságát!
13. Adja meg az alábbi sorozatok első 10 elemét:  
$$a_n = 3n - 4$$
$$a_n = \frac{12n - 1}{24n + 1}$$
$$a_n = \frac{n^2}{n!}$$
$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
14. Adjon példát olyan sorozatra, amely konvergens, de nem monoton!

## 172.2.5 Cauchy-féle konvergencia kritérium

Annak eldöntése, hogy egy sorozat konvergál-e vagy sem azért nem könnyű feladat, mert a definíciónk alapján csak akkor tudjuk belátni egy sorozatról a konvergencia tényét, ha már ismerjük a sorozat konvergencia pontját. A gyakorlatban – a technikai fogásokat mi nem tanuljuk – „megsejtjük” a sorozat határértékét, majd a definíció alapján bebizonyítjuk a sejtés helyességét. Az ebben a fejezetben tárgyalandó kritérium **szükséges és elégséges feltételt** ad arra, hogy egy sorozat mikor konvergál, anélkül, hogy a konvergencia pontról nyilatkozná. A kritérium a következő:

### 12. Tétel

**A  $(H, \rho)$  metrikus tér  $a_n$  sorozata akkor és csakis akkor konvergens, ha bármely tetszőlegesen kicsi, de pozitív  $\varepsilon$  számhoz megadható olyan  $n_0$  küszöbindex, hogy a sorozatnak minden olyan tagjára, amelynek indexei nagyobbak ez előbbi küszöbindexnél – azaz  $n, m > n_0$  – teljesül, hogy  $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$ .**

### Megjegyzés

1. A tételt nem bizonyítjuk.
2. A kritérium tehát azt fejezi ki, hogy a sorozat konvergenciájához szükséges és elegendő, ha a sorozat egyre nagyobb indexű tagjai „végtelenül közel” kerülnek egymáshoz.
3. Vannak metrikus terek, amelyekben a fenti tulajdonsággal bíró ún. Cauchy-sorozatok nem konvergensek, mert a konvergencia pont már nem eleme a térnek. Ezek a terek nem „teljesek”. **Azt a metrikus teret, amelynek minden Cauchy-sorozata konvergens teljes metrikus térnek nevezzük.**

## 172.2.6 Konvergens sorozatok tulajdonságai

Nem nehéz belátni – az érdeklődő hallgatók feladatul tűzhetik ki maguknak – az alábbi állításokat:

### 13. Tétel

**Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  és  $c \in \mathbf{R}$ . Ekkor**

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$(4) \text{ ha } b \neq 0 \text{ akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

### Megjegyzés

1. A  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$  következik az (1) és (2)-ből.
2. Habár úgy tűnik, hogy a fenti fogalomalkotásnál a „távolság” fogalma játszik alapvető szerepet, ez még sincs így. A **nyílt környezet** az, amely megalapozza a további definíciókat. Mi a környezetet a távolság fogalom segítségével definiáltuk, de tehettük volna másként is. Például így: Tekintsük a  $H$  halmazt és jelöljük ki e halmaz **részalmazainak egy olyan rendszerét**, amely a következő

tulajdonságokkal bír: A teljes és az üres halmaz tartozzék a rendszerhez, tetszőlegesen sok rendszerbeli részhalmaz uniója is legyen eleme a rendszernek, véges sok rendszerbeli részhalmaz metszete is legyen eleme a fenti rendszernek. Ezt a kiválasztott részhalmaz rendszert **környezetrendszernek** nevezhetjük és így jutunk el a **topológikus tér** fogalmához. Ennek vizsgálata nem tartozik az alkalmazott tudományok, így a számítástudomány hatáskörébe sem, éppen ezért ezzel a stúdium keretei között nem foglalkozunk.

## 172.2.7 Függvények

Mint azt már a leképezések tárgyalásakor említettük, a „**leképezés**” és a „**függvény**” számunkra **azonos fogalmakat** jelentenek. Ha mást nem említünk, akkor itt és most a valós számok halmazát a valós számok halmazába leképező **egyváltozós valós függvényekről** beszélünk. Azaz, vizsgálatunk tárgyát az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  leképezések jelentik.

Alkalmazkodva a konvencionális – és számos esetben praktikus – jelöléshez az  $f(x)$  alakú formát fogjuk használni. Ebben a jelölésben az  $x$  jelöli a **független változót**, azaz azt, amihez az  $f$  függvény értéket rendel. Például a jól ismert  $f(x) = x^2$  függvény esetében az  $x$  változó felveheti értékként a valós számok mindegyikét és értékül a függvény a felvett érték négyzetét adja vissza. Például:  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(-2) = 4$ ,  $f(-3) = 9$ .

Lesznek olyan függvényeink, amelyek nem minden valós számra „működnek”. Tekintsük az  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  függvényt! Nem nehéz észrevennünk, hogy, az  $x = 1$  helyen ez a függvény „csödöt mond”. Úgy mondjuk, hogy a függvény az  $x = 1$  helyen nincs értelmezve.

A figyelmes olvasó most fel kell, hogy szisszenjen, mert a leképezéseknél azt tanultuk, hogy egy reláció akkor és csakis akkor leképezés, ha jelen esetben a valós számok **mindegyikéhez** rendel az  $f$  egy és csakis egy értéket. Ez valóban ellentmondás, de könnyen feloldható. Minden esetben leszűkíthetnénk az  $\mathbf{R}$  halmazt úgy, hogy a leképezés fogalma ne sérüljön. Példánkban tehát úgy kellene megadnunk, hogy  $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$ . Mivel vizsgálatunk nem algebrai jellegű strukturális vizsgálatokra irányul ezért ettől ebben a fejezetben eltérünk és felelevenítjük az értelmezési tartomány fogalmát.

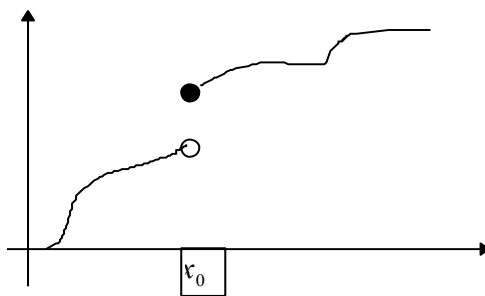
### 17. Definíció

Az  $f$  függvény **értelmezési tartománya** az a halmaz, amelyből értékeit felveszi.

Fenti példánkban tehát a függvény értelmezési tartománya az 1-től különböző valós számok halmaza. Ez a kicsi és nem lényegi korrekció után térjünk át vizsgálatunk igazi tárgyára a függvények határértékére és folytonosságára.

### 172.2.7.1 Függvény határértéke és folytonossága

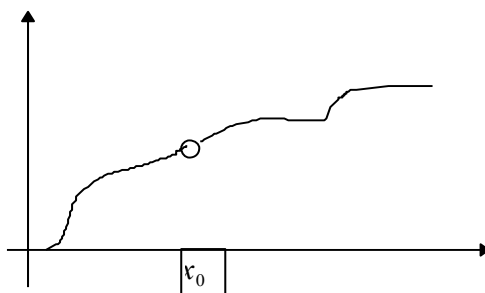
Tekintsük az alábbi függvényt!



Látjuk, hogy a függvény  $x_0$  pontjában a függvény „furcsán” viselkedik. Vegyünk egy olyan  $y_n$  számsorozatot, amelynek tagjai az  $x_0$ -nál kisebb számok és az  $x_0$ -hoz konvergál. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a sorozat balról közelíti az  $x_0$  pontot. Vizsgáljuk meg az  $f(y_n)$  értékeket, amely számok szintén egy sorozatot definiálnak!

Látható, hogy ez utóbbi sorozat is konvergál ahhoz a számhoz, amelyet úgy kapunk, hogy a „karikát” levetítjük az  $y$ -tengelyre. Vegyük most azt a  $z_n$  sorozatot, amely az  $x_0$  ponthoz „jobbról” konvergál. Az  $f(z_n)$  sorozat szintén konvergens lesz és az  $f(x_0)$  számhoz fog konvergálni.

Tekintsük most a



függvényt.

Ha az előbbi vizsgálatokat elvégezzük, akkor azt láthatjuk, hogy **tetszőleges**  $x_n \rightarrow x_0$   $x_n \neq x_0$  konvergens sorozat esetén az  $f(x_n)$  számsorozat ugyanahhoz a számhoz fog konvergálni, még ha az a szám nem is az  $f(x_0)$ , hiszen függvényünk az  $x_0$  pontban nincs értelmezve. E fenti vizsgálódásaink alkalmat adnak egy hasznos definíció megfogalmazására:

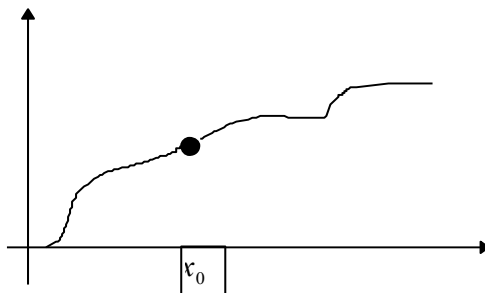
### 18. Definíció

Az  $f$  függvénynek az  $x_0$  pontban vett **határértéke** az  $A$  szám, ha **tetszőleges**  $x_n \rightarrow x_0$   $x_n \neq x_0$  sorozat esetén  $f(x_n) \rightarrow A$ .

### Megjegyzés

1. Az első példánkban nincs határértéke a függvénynek, mert megadhatunk két olyan sorozatot (például az  $y_n = x_0 - \frac{1}{n}$  és a  $z_n = x_0 + \frac{1}{n}$ ) amelyeken a felvett függvényértékek sorozata ( $f(y_n)$  és  $f(z_n)$ ) nem ugyanahhoz a számhoz konvergál.
2. Ahhoz, hogy a függvénynek egy pontban határértéke legyen nem fontos, hogy ott értelmezve legyen.
3. Ha egy függvénynek nincs szakadása egy pontban, akkor ott létezik határértéke, megfordítva nem igaz, ha egy függvénynek egy pontban van határértéke, akkor ott nem biztos, hogy értelmezve van.

Módosítsuk a vizsgálatunk tárgyát képező függvény grafikonját!



A fekete kitöltött kör azt szeretné jelképezni, hogy a függvény az  $x_0$  pontban is értelmezve van. Ennek a függvénynek nem csak, hogy létezik határértéke az  $x_0$  pontban, de ez a határérték nem más, mint az  $f(x_0)$ . Ilyen esetben azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény folytonos az  $x_0$  pontban. Ezt az alapvető fogalmat egy kissé jobban megvizsgáljuk és több, egymással ekvivalens definíciót is adunk rá.

### 19. Definíció

Az  $f$  függvény **folytonos** az  $x_0$  pontban, ha ott van határértéke és ez megegyezik  $f(x_0)$ -al.

### 20. Definíció

Az  $f$  függvény **folytonos** az  $x_0$  pontban, ha ott értelmezve van és minden  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$  sorozat esetén  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

### 21. Definíció

Az  $f$  függvény **folytonos** az  $x_0$  pontban, ha tetszőleges kicsi, de pozitív  $\varepsilon$ -hoz, megadható olyan az  $\varepsilon$ -tól függő pozitív szám, hogy valahányszor  $|x - x_0| < \delta$ , mindannyiszor  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

### Megjegyzés

1. A fenti definíciók az **egy pontban** való határértéket és folytonosságot definiálják, tehát nem beszélnek az intervallumon vett folytonosságról.
2. (Csak az érdeklődő hallgatóknak szánt anyagrészt, nem kötelező)

Ez utóbbi definíció, amelyet egyébként Cauchy-típusú definíciónak is mondanak, sugallja, hogy itt a már megismert távolság fogalom játszik központi szerepet. Éppen ezért elszakadva a valós számok halmazától próbáljuk meg definiálni a folytonosságot általánosabban is. Íme egy definíció:

Legyen  $(H, \rho)$  és  $(K, \psi)$  két metrikus tér. Az  $f: H \rightarrow K$  függvény az  $x_0 \in H$ -ban folytonos, ha tetszőlegesen kicsi, de pozitív  $\beta$ -hoz megadható olyan – ez előbbtől függő – pozitív  $\lambda$ , hogy valahányszor  $\rho(x, x_0) < \lambda$ , mindannyiszor  $\psi(f(x), f(x_0)) < \beta$ .

Topológikus terekben szintén definiálható a folytonosság fogalma, sőt ez a fogalom az egyik központi fogalma a topológiai vizsgálatoknak.

A fenti folytonosság definíció intervallumra való kiterjesztése a következő:

**22. Definíció**

Az  $f(x)$  függvény **folytonos az  $(a,b)$  nyílt intervallumon**, ha annak minden pontjában folytonos.

**Megjegyzés**

Az intervallumon vett folytonosság szemléletes. A függvény képét megjelenítő görbén nem lehet szakadás. De ez természetesen nem definíció, hiszen megadható olyan függvény, amelynek egy pont körüli viselkedése a szemlélet útján aligha látható be. Ilyen például az:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

**172.2.7.2 Folytonos függvények tulajdonságai**

Az alábbi állításokat nem bizonyítjuk, de a későbbiekben még visszautalunk a folytonos függvények tulajdonságaira.

**14. Tétel**

**Ha az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények az  $x_0$  pontban folytonosak, akkor az**

- 1.  $f(x) + g(x)$**
- 2.  $a \cdot f(x)$ , ahol  $a \in \mathbf{R}$**
- 3.  $f(x) \cdot g(x)$**
- 4.  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , ha  $g(x_0) \neq 0$**

**függvények is folytonosak az  $x_0$  pontban.**

**Megjegyzés**

A fenti azonosságok alkalmazásával, függvények tetszőleges, ún. lineáris kombinációjáról is el tudjuk dönteni a folytonosság meglétét az adott pontban.

## 172.2.8 Ellenőrző kérdések

1. Értelmezze a tanult konvergencia kritériumot!
2. Mit jelent az a fenti kritériumban, hogy „szükséges és elegendő”?
3. Ismertesse a konvergens sorozatok tulajdonságait!
4. Mit nevezünk függvénynek?
5. Mit nevezünk az  $f(x)$  függvény értelmezési tartományának és mit az értékkészletének?
6. Az  $x_0$  pontban való folytonosságból következik-e, hogy ott a függvénynek van határértéke? És megfordítva?
7. Mikor folytonos a függvény egy nyílt intervallumon?
8. Adjon példát olyan függvényre, amelynek egy  $x_0$  pontban van határértéke, de ott nem folytonos!
9. Adjon példát olyan függvényre, amelynek egy  $x_0$  pontban nincs határértéke!
10. Adjon meg egy olyan  $f(x)$  függvényt és egy olyan nyílt intervallumot, amelyen ez előbbi függvény folytonos!

# 3. TÉMA

## Komplex számok

### 172.3.1 Bevezetés

A halmazelméleti alapok elsajátítása közben bemutattuk a természetes számok egyik konstrukcióját. Mint láttuk, a természetes számok halmazán a kivonás nem volt művelet, ezért célszerű volt bevezetni az egész számok halmazát; hasonlóan, az egész számok halmazán a szorzás művelete nem invertálható, ezért praktikus volt bevezetni a racionális számok halmazát.

Középiskolában megmutatják, hogy létezik olyan szám, amelyik nem racionális. Az irracionális és a racionális számok halmazának unióját nevezzük valós számoknak. A valós számok halmaza sem elegendően bő, mert például az

$$x^2 + 1 = 0$$

egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán, azaz nincs olyan valós szám, amelynek a négyzetéhez egyet hozzáadva nullát kapnánk eredményül.

Fontos észrevennünk, hogy a folyamatos halmazbővítések során, a halmazokon definiált összeadás és szorzás műveletek, minden a bővítés előtti halmazon definiált műveleteknek a kiterjesztései lettek.

Célunk a továbbiakban az, hogy olyan módon **bővítsük a valós számok halmazát**, hogy

1. Az  $x^2 + 1 = 0$  egyenlet megoldható legyen az új struktúrában.
2. Az új halmaz valódi részhalmazként tartalmazza a valós számok halmazát.
3. Az új halmazon definiált összeadás és szorzás műveletek a valós számhalmazon értelmezett műveleteknek a kiterjesztése legyen.

### 172.3.2 Komplex számok konstrukciója

Az új halmaz legyen a sík pontjainak a halmaza, amely nem más, mint az  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , azaz a valós számpárok halmaza. Ez utóbbit a továbbiakban  $\mathbf{C}$ -vel fogjuk jelölni. Mivel a számsík valódi részhalmazként tartalmazza a számegyeneset, ezért elmondhatjuk, hogy minden, az egyenesen elhelyezkedő  $(a,0)$  alakú elem egyben a  $\mathbf{C}$ -nek is eleme.

Definiáljuk a  $\mathbf{C}$  halmazon az alábbi két műveletet!

#### 23. Definíció

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

#### Megjegyzés

Amennyire természetesnek tűnik az összeadás definíciója, annyira furcsa a szorzásé. Mint majd látni fogjuk a definíció jó, azaz valóban: az új műveletek, a valós számok halmazán a „rég” összeadás és szorzás műveletét adják vissza, másrészt bizonyítható, hogy a szorzásra adott fenti definíció az egyetlen lehetőségünk arra, hogy a bővítés korrekt legyen.

**15. Tétel**

Mind az összeadás, mind a szorzás művelete a  $\mathbb{C}$  halmazon kommutatív, asszociatív, a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

**Bizonyítás**

Gyakorlásképpen az Olvasóra bízunk a fentiek belátását.

**16. Tétel**

A fenti definíció – ha a műveletet a számegyenesre szűkítjük le – visszaadja a valós számokon definiált összeadás és szorzás műveletét.

**Bizonyítás**

$$(a,0) + (b,0) = (a + b,0),$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b,0).$$

**17. Tétel**

A komplex számok halmazán az  $x^2 + 1 = 0$  egyenlet megoldható.

**Bizonyítás**

Tekintsük a  $(0,1)$  pontot, amely eleme a  $\mathbb{C}$  halmaznak! E pont négyzete, ami nem más, mint az önmagával vett szorzata  $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ . Azaz, a  $(0,1)$  komplex szám megoldása a fenti egyenletnek.



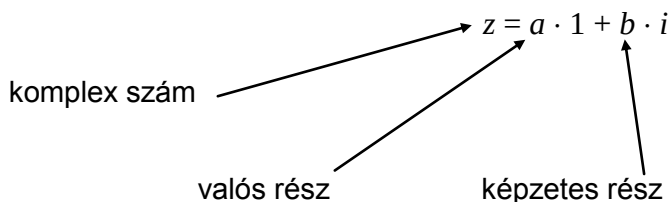
Vezessük be a  $(0,1) = i$  jelölést!<sup>4</sup> A fentiek alapján  $i^2 = -1$ .

### 172.3.3 A komplex számok hagyományos (algebrai) alakja

Mivel  $(a,b) = (a,0) + (0,b)$  ezért az előbbi jelölést figyelembe véve, továbbá azt, hogy  $b \cdot i = (b,0) \cdot (0,1) = (0,b)$  azt kapjuk, hogy

$$(a,b) = a + b \cdot i.$$

Az  $(a,b)$  számpárt a továbbiakban **komplex számnak** fogjuk nevezni. Ahogyan a valós számok a számegyenes pontjaival, úgy a komplex számok a sík pontjaival lesznek reprezentálva. A „komplex” elnevezés abból származik, hogy egy komplex szám két részből áll: egy valós és egy képzetes részből, pontosabban:

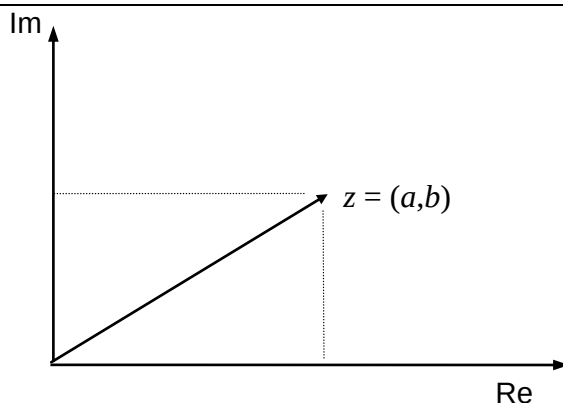


ahol az „1” a valós multiplikatív egység, az „a” és „b” valós szám az „i” a képzetes egység.

### 172.3.4 A komplex számok trigonometrikus alakja

Komplex számok helyvektorokkal történő ábrázolása, meglehetősen szemléletes.

<sup>4</sup> Az  $i$  betű az imaginárius (képzetes) szónak az első betűjéből származik.



## 24. Definíció

A  $z = a + b \cdot i$  komplex szám **komplex konjugáltján** a  $\bar{z} = a - b \cdot i$  komplex számot értjük.

## 18. Tétel

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \text{ azaz valós szám.}$$

## Bizonyítás

A definíciók alapján triviális.



A fenti egyszerű de fontos állítás lehetővé teszi, hogy a komplex számok osztását visszavezzük valós számmal való osztásra. Például, ha az

$$\frac{1 + 3i}{2 - 5i}$$

hányadost kell kiszámítanunk, akkor az az eljárás, hogy mind a számlálót, mind a nevezőt megszorozzuk nevező komplex konjugáltjával, jelen esetben a  $2 + 5i$ -vel. Innen pedig tagonkénti osztással jön a végeredmény, hiszen a nevező ekkor már valós szám.

## 172.3.5 Komplex szám abszolút értéke

Valós számok körében a szám abszolút értéke a számnak a nullától való távolságát jelöli. Az abszolút érték fogalmát könnyen kiterjeszthetjük a komplex számok esetére is. Semmi újat nem mondva: egy komplex szám abszolút értékén a számnak az origótól való távolságát nevezzük.

Amíg a valós számok esetében minden esetben két szám van ugyan olyan pozitív távolságra az origótól (például a 3 és a  $-3$ ), addig a komplex számok esetében végtelen sok komplex szám van egy adott pozitív távolságra a  $(0,0)$  ponttól.

## 25. Definíció

A  $z = a + b \cdot i$  komplex szám abszolút értéke  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

## Megjegyzés

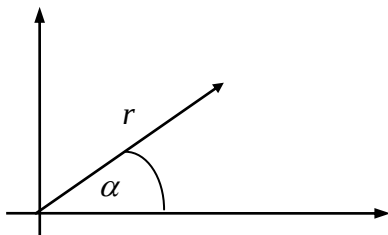
Ha a szám konjugáltját tekintjük, akkor  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ . Az azonos abszolút értékkel rendelkező komplex számok az origó középpontú  $|z|$  sugarú körön helyezkednek el.

A komplex számok előzőekben bevezetett alakja praktikus, ha az összeadás műveletét tekintjük, de rendkívül kényelmetlen, ha szoroznunk, netán hatványoznunk kell őket. Nincs

akadályozza annak, mint majd látni fogjuk, hogy egy praktikus és ekvivalens átfogalmazást adjunk, amelynek célja kizárólag az, hogy a gyökvonás és a hatványozás elemi módon is elvégezhető legyen.

Amint azt az előzőekben láttuk a sík helyvektorainak halmaza és a komplex számok halmaza között bijekció létesíthető, sőt ennél még többet is mondhatunk, ha mint kétműveletes struktúrákat tekintjük a fenti két halmazt, akkor nem nehéz megmutatnunk, hogy azok izomorfak. Ez pedig, mint azt az algebrai struktúrák leképezései fejezetben megemlégtettük, azt jelenti, hogy absztrakt algebrai szempontból azonosnak tekinthetők.

A sík helyvektorai azonban úgy is megadhatóak, hogy hosszukat és a valós tengellyel bezárt szögét. Ezt mutatja be az alábbi ábra:



Mivel a vektornak a valós tengelyre eső vetülete  $r \cdot \cos \alpha$ , továbbá a képzetes tengelyre eső vetülete  $r \cdot \sin \alpha$ , ezért – figyelembe véve az előzőekben bevezetett  $z = a + b \cdot i$  alakot –, azt kapjuk, hogy minden komplex szám felírható az alábbi, ún. trigonometrikus alakban:

$$z = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha).$$

A fenti alakban felírt komplex számok szorzása, és így hatványozása is egyszerűsödik.

### 19. Tétel

**Ha  $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  és  $z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$ , akkor**  
 $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)).$

### Bizonyítás

Emlékeztetve az olvasót a középiskolában tanult ún. addíciós tételre, miszerint  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , illetve  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  az állítás a szorzással és megfelelő átrendezéssel közvetlenül belátható.



A fenti tétel közvetlen következménye az ún. **Moivre-képlet**, amely a komplex számok hatványozásáról szól.

### 20. Tétel

**Ha  $z = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ , akkor  $z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ .**

## 172.3.6 Gyökvonás komplex számból

### 26. Definíció

A  $z$  komplex szám  $n$ . gyökén azt a  $w$  komplex számot értjük, amelyre teljesül, hogy  $z = w^n$ .

### Megjegyzés

A fenti definíció kapcsán az alábbi kérdések merülnek fel: van-e egyáltalán gyöke egy komplex számnak, ha van, akkor csak egy van-e, vagy esetleg több is, és nem utolsó sorban mi a gyökvonás „algoritmusa”. Mint majd látni fogjuk minden komplex számnak van  $n$ . gyöke, mégpedig pontosan  $n$  darab.

Tegyük fel, hogy  $z = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$  számnak keressük az  $n$ . gyökét. Amennyiben ez a gyök a  $w = s \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  lenne, akkor az előbbi definíció alapján a következő egyenlőségnek kell teljesülnie:

$$r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) = (s(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n.$$

A Moivre-képlet alapján ez ekvivalens a

$$r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) = s^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi).$$

Ez az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$$r = s^n \text{ és } \alpha = n\varphi.$$

Nem elfelejtve azt, hogy egy szög, lényegét tekintve azonos azzal a szöggel, amelyet úgy kapunk, hogy a teljes kört, a  $2\pi$ -t az adott szöghöz hozzáadjuk. Ennek figyelembe vételével az előbbi képletünket úgy kell pontosítanunk, hogy

$$r = s^n \text{ és } \alpha + k2\pi = n\varphi.$$

Mivel az  $r$  és az  $s$  nem negatív valós számok – távolságról van szó! – a gyökvonás elvégezhető, és így azt kapjuk, hogy  $s = \sqrt[n]{r}$ , továbbá  $\varphi = \frac{\alpha + k2\pi}{n}$ , ahol  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Ezzel az előzőekben felvetett kérdések mindegyikét megválaszoltuk, sőt megadtuk a gyökök kiszámításának képleteit is.



### 172.3.7 Ellenőrző kérdések, feladatok

1. Venn-diagram segítségével ábrázolja a valós számok azon részhalmazait, amelyek a természetes, egész, racionális és irracionális számokat tartalmazzák!
2. Miért szükséges a valós számok bővítése?
3. Adja meg a bővítés lépéseit! Használja az absztrakt algebrában tanult alapfogalmakat!
4. Milyen kapcsolat van a sík helyvektorai és a komplex számok halmaza között?
5. Milyen kapcsolat van a  $(\mathbb{C}; +)$  és a  $(\mathbb{V}; +)$  algebrai struktúrák között?
6. Jellemezze a  $(\mathbb{C}; +)$  algebrai struktúrát!
7. Mit nevezünk egy komplex szám abszolút értékének?
8. A valós számokhoz hasonlóan rendezett-e a  $(\mathbb{C}; +)$  struktúra?
9. Mi a komplex konjugált geometriai jelentése?
10. Milyen számosságú halmaz a  $\mathbb{C}$ ?
11. Vezesse le egy komplex szám trigonometrikus alakját!
12. Mit jelent a komplex szám felírásában az  $i$ ?
13. Hol helyezkednek el a komplex síkon egy szám gyökei?
14. Végezze el a következő műveleteket:  $(5 + 3i) + (2 - 4i)$ ;  $(8 + i)(2 - i)$ ;  $(3 - i)(3 + i)$ ;  
 $\frac{(3 + i)}{(1 - i)}$ ;  $\frac{(5 - 2i)}{(2 + 3i)}$
15. Ábrázolja a fenti feladatban szereplő számokat!
16. Írja át trigonometrikus alakba a következő számokat:  $(1 + i\sqrt{2})$ ;  $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$ ;  
 $(-1 - i\sqrt{3})$ .
17. Számítsa ki az alábbi hatványokat:  $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{17}$ ;  $(1 - i)^{72}$
18. Írja fel a fentiekben szerepelt komplex számokat trigonometrikus alakban!
19. Hol helyezkednek el a komplex számsíkon azok a komplex számok, amelyek abszolút értéke nagyobb mint 5?
20. Írja át az alábbi trigonometrikus alakban felírt komplex számokat „hagyományos” alakba:  $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ;  $3(\cos 56^\circ 52' + i\sin 56^\circ 52')$ .
21. Számítsa ki a következő gyököket:  $\sqrt[6]{-27}$ ;  $\sqrt[3]{2 - 2i}$ ;  $\sqrt[6]{\frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}}$ ;  $\sqrt[3]{i}$ .
22. Adjuk meg azokat a komplex számokat, amelyek az alábbi másodfokú polinomok gyökei:  $x^2 + 2x + 5$ ;  $3x^2 + x + 2$

# 4. TÉMA

## Polinomok

Az elemi matematikából közismert  $a \cdot x + b$  és az  $ax^2 + bx + c = 0$  egyenleteknek az általánosításaként bevezethetjük az egyetlen  $x$  ismeretlent tartalmazó

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$n$ -ed fokú egyenletet. Az  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  tetszőleges valós számok, de fel kell tennünk, hogy  $a_n \neq 0$ .

### 172.4.1 Polinomok, mint algebrai kifejezések

A fenti – és a most definiált – egyenletek megoldásának a feladata azt jelenti, hogy meg kell keresnünk azokat a számokat, amelyeket az egyenlet ismeretlenjének a helyébe behelyettesítve az egyenlőség igaz lesz.

Például a

$$3x - 15 = 0$$

egyenletnek a megoldása azt jelenti, hogy megadjuk azt a számot, amelyet az  $x$  helyébe behelyettesítve igaz állítást kapunk. Könnyen látható, hogy a fenti egyenletnek a megoldása az  $x = 5$ .

Ha ez utóbbit, mint függvényt tekintjük, akkor  $f(x) = 3x - 15$  első fokú polinomról beszélünk, és ekkor az  $x = 5$ -öt a polinom gyökének nevezzük.

#### 27. Definíció

Az  $f(x)$  függvénynek az  $x_0$  akkor és csakis akkor **gyöke**, ha  $f(x_0) = 0$ .

Hasonlóan végiggondolhatjuk a fentieket a másodfokú egyenletek, illetve a másodfokú polinomok esetében is. Ezekkel a középiskolákban már megismerkedtünk, sőt eljárásokat is tanultunk arra, hogy hogyan találhatjuk meg a gyököket. Gondoljunk itt a másodfokú egyenlet megoldó képletére.

Tegyük fel tehát kérdéseinket az  $n$ -ed fokú egyenletek esetében is! Hány megoldása van egy ilyen egyenletnek? Hogyan lehet ezeket megkeresni? A válaszokat csak kimondjuk, bizonyítani nem fogjuk azokat.

#### 21. Tétel (Az algebra alaptétele)

**Egy  $n$ -ed fokú egyenletek pontosan  $n$ -darab megoldása van. A megoldások általában komplex számok.**

#### Megjegyzés

Vajon megadható-e a másodfokú egyenlet megoldó képletéhez hasonló formula? Azaz, megadható-e olyan gyökképlet<sup>5</sup>, amely *tetszőleges*  $n$ -ed fokú egyenlet együtthatóinak ismeretében visszaadja eredményül a megoldást, illetve megoldásokat. A válasz az algebra egyik nagy eredménye. A csoportelméleti módszerekkel bebizonyított – Galois eredményein alapuló – tétel szerint:

<sup>5</sup> Gyökképletnek olyan formulát nevezünk, amelyben csak az egyenlet együtthatói, racionális számok, továbbá a négy alapművelet és a gyökvonás szerepelhet véges sokszor.

**22. Tétel**

**Az  $n \geq 5$  esetben az  $n$ -ed fokú egyenletnek nincsen azt megoldó gyökképlete.**

Az előző tétel szerint nem adható meg ilyen képlet, tehát más utat kell keresnünk a gyökök kiszámítására.

**23. Tétel**

**Tekintsük a legfeljebb  $n$ -ed fokú polinomok halmazát és az azon definiált  $\oplus$  (összeadás) műveletét. Az így kapott struktúra Abel-csoportot alkot.**

**Bizonyítás**

Az Abel-csoport definíciójából azonnal következik a tétel állítása.



## 172.4.2 Polinomok, mint függvények

Ha a polinomokat, mint függvényeket tekintjük, akkor a függvényeknek egy nagyon barátságos osztályához jutunk, mert igaz az alábbi

**24. Tétel**

**A polinomok**

- 1. a teljes számegyenesen értelmezettek**
- 2. a számegyenes minden pontjában folytonosak**
- 3. akárhányszor differenciálhatóak.**

Ezek a tulajdonságok – viszonyítva más függvényekhez képest – rendkívül hasznossá teszik őket, sőt a „bonyolultabb” függvényeket is képesek vagyunk velük közelíteni.

## 172.4.3 Lagrange-féle interpoláció

A függvények közelítésének módszereivel az **approximáció-elmélet** foglalkozik. Mi a függvények közelítésének egy egyszerű, de széles körben használt módjával az interpoláció útján történő közelítéssel fogunk foglalkozni. Itt is a legegyszerűbb feladat megoldását tűzzük ki célul, nevezetesen:

Ha adottak a diszkrét  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pontok és az ezekben a pontokban felvett  $y_1, y_2, \dots, y_n$  függvényértékek, akkor, hogyan tudjuk meghatározni az  $f(x)$  függvény értékeit más  $x$  pontokban?

A probléma lépten-nyomon felbukkan a számítástechnikában. Gondoljunk itt egy szögfüggvény értékeinek a kiszámítására. Mint, ahogyan azt az előzőekben említettük, a polinomok jól kezelhetőek, ezért a közelítést polinomokkal fogjuk elvégezni.

**25. Tétel**

**Ha adottak a páronként különböző  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pontok, és az ezekben a pontokban felvett  $y_1, y_2, \dots, y_n$  függvényértékek, akkor létezik egy és csakis egy olyan legfeljebb  $n-1$ -ed fokú polinom, amely az alappontokban a megadott  $y_1, y_2, \dots, y_n$  függvényértékeket veszi fel.**

Mielőtt nekilátunk a tétel bizonyításához, a következő megjegyzéseket tesszük:

1. Be kell látnunk, hogy valóban létezik ilyen polinom.

2. Be kell látnunk, hogy a megtalált polinomnak unicitása (egyedisége) van, azaz nincs más olyan legfeljebb  $n-1$ -ed fokú polinom, amelyre az állítás igaz.
3. A megtalált polinom segítségével fogjuk a közbülső pontokban közelíteni a közbülső értékeket.

### Bizonyítás

Ún. segéd polinomokat fogunk konstruálni. Tekintsük az

$$l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \text{ kifejezést!}$$

Az  $l_1(x)$  polinom olyan, hogy az  $x_1$  pontban 1-et, a többi alappontban *nullát* vesz fel, továbbá legfeljebb  $n-1$ -ed fokú.

Konstruáljuk meg az

$$l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}$$

polinomot, amely olyan hogy az  $x_2$  pontban 1-et, a többi alappontban *nullát* vesz fel, továbbá legfeljebb  $n-1$ -ed fokú.

Általában az  $i$ . ponthoz tartozó segéd polinom alakja a következő:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Ez a polinomunk is olyan, hogy  $x_i$  pontban 1-et, a többi alappontban *nullát* vesz fel, továbbá legfeljebb  $n-1$ -ed fokú.

Ha elkészítettük az  $n$ -darab segéd polinomot, akkor tekintsük a következő, szintén legfeljebb  $n-1$ -ed fokú polinomot:

$$L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \dots + y_i l_i(x) + \dots + y_n l_n(x)$$

amelyet tömörebb formában

$$L(x) = \sum_{i=1}^n y_i l_i(x)$$

szoktunk leírni. Az  $L(x)$  polinom valóban legfeljebb  $n-1$ -ed fokú és az alappontokban a megadott  $y$  értékeket veszi fel. Azaz a polinom létezését bebizonyítottuk és megadtuk, hogy hogyan kell azt megkonstruálni.

Az alábbiakban belátjuk a megtalált polinom unicitását is.

Tegyük fel, hogy létezik olyan másik, mondjuk  $M(x)$  polinom, amely az adott  $n$ -darab  $x$  pontban a megadott értékeket veszi fel és legfeljebb  $n-1$ -ed fokú. Ha ilyen van, akkor képezhető a szintén legfeljebb  $n-1$ -ed fokú  $Q(x)$  polinom, ahol

$$Q(x) = L(x) - M(x)$$

Vizsgáljuk meg a  $Q(x)$  polinomot! **Legfeljebb  $n-1$ -ed fokú, de  $n$ -darab gyöke van,** hiszen az alappontokban  $Q(x)$  nullát vesz fel! Ez viszont ellentmond a 21. tételnek. Azaz, a  $Q(x)$  polinom csak a zérus polinom lehet, de akkor

$$L(x) = M(x).$$



# 5. TÉMA

## Lineáris algebra elemei

A középiskolában megismert helyvektorok azok az irányított szakaszok, amelyek kezdőpontja a Descartes-féle koordinátarendszer origójában van rögzítve, végpontja pedig a sík egy tetszőleges pontja. Például a  $\mathbf{v} = [3, 2]$  vektor kezdőpontja az origó, végpontja pedig a (3,2) pont. Általában jegyezzük meg, hogy jegyzetünkben a vektorokat kövérített betűkkel jelöljük.

Definiálhatjuk a vektor hosszát, amely nem más, mint a kezdőpont és a végpont euklideszi távolsága. Ez utóbbit  $|\mathbf{v}|$  jelöli.

Könnnyen belátható, hogy a sík helyvektorai és pontjai között bijekció definiálható. A középiskolában definiáltuk a vektorok összeadását és *számmal* való szorzását, de nem szoroztunk össze két helyvektort.

Az algebrai struktúrák tanulmányozásának egyik eredménye az volt, hogy beláttuk azt, hogy számos – egymástól „távol levő” – halmaz mutat hasonló strukturális tulajdonságokat. Így van ez esetünkben is. A vektorok halmaza, és az ezen definiált összeadás olyan struktúrát hoz létre, amelyik számos más objektum által alkotott struktúrához hasonló. Így jutunk el a lineáris tér definíciójához.

### 172.5.1 Lineáris tér

#### 28. Definíció

A nem üres  $L$  halmazt **lineáris** (vagy **vektor**) **térnek** nevezzük, ha  $L$  az összeadásra nézve Abel-csoport. (Az additív egységet 0 jelöli) másrészt, ha  $\mathbf{R}$  jelöli a valós számok halmazát, akkor  $\forall a \in \mathbf{R}$  és  $\forall \mathbf{x} \in L$  esetén  $a \cdot \mathbf{x} \in L$ . Továbbá, ez utóbbi – skalárral való szorzás – a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1.  $a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{x}$
2.  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
3.  $(a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x}$
4.  $a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y}$ .

Minden  $a, b \in \mathbf{R}$  és  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$  esetében.

#### Példák

1. A valós számok halmaza – saját maga felett – lineáris teret alkot.
2. Jelölje  $C_{[a,b]}$  az  $[a,b]$  intervallum felett definiált folytonos függvények halmazát! E fenti halmaz a valós számtest felett lineáris teret alkot.
3. A konvergens számsorozatok halmaza az  $\mathbf{R}$  feletti lineáris tér.
4. A sík helyvektorainak a halmaza szintén lineáris tér a valós számok halmaza felett.
5. A legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok halmaza lineáris tér a valós számtest felett.

A fenti definíciót általánosabban is kimondhatjuk, beszélhetünk tetszőleges test feletti lineáris térről. A gyakorlati alkalmazások szempontjából a valós számtest feletti lineáris terek a legfontosabbak. A középiskolában megismert helyvektorok halmaza szintén lineáris teret alkot a valós számok felett, ezért néha a lineáris tereket vektortereknek is nevezzük. Mivel szemléletessége miatt az alapfogalmakat könnyebb megértenünk, ha vektorok terét hozzuk

fel példának, ezért a továbbiakban ezt tárgyaljuk, de a bevezetett fogalmak minden lineáris tér esetében értelmezhetőek.

## 172.5.2 Lineáris kombináció

### 29. Definíció

Legyenek  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  tetszőleges vektorok és az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  valós számok. Az  $a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{b}$  kifejezést, ami szintén egy vektor, az  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük.

A fenti definícióban szereplő  $\mathbf{b}$  vektorról azt mondjuk, hogy az előállítható, vagy előáll az  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  vektorok lineáris kombinációjaként. Érdekes és fontos kérdés, hogy vajon van-e véges sok olyan vektor, amelyek a vektortér minden – általában végtelen sok – elemét képesek előállítani. Amennyiben ilyet találnánk, akkor azt **bázis**nak fogjuk nevezni. Ahhoz, hogy a kérdést megválaszoljuk be kell vezetnünk a „lineáris függetlenség” fogalmát.

### 30. Definíció

Az  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  vektorok **lineárisan független vektorrendszert** alkotnak, ha a zérus vektort csak úgy képesek előállítani („lineárkombinálni”), hogy az összes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok értéke zérus.

Ha egy lineárisan független vektorrendszerből elveszünk egy vektort szintén független rendszert kapunk, ha pedig egy független rendszerhez hozzáadunk egy vektort, akkor vagy független marad vagy már függő rendszer lesz.

### 31. Definíció

Egy vektorrendszer **maximálisan lineárisan független**, ha független és tetszőleges vektort a rendszerhez csatolva már függő rendszert kapunk.

### 26. Tétel

**Egy vektortér maximálisan lineárisan független rendszereinek elemszáma azonos.**

A fenti tételben szereplő elemszámot a tér dimenziójának nevezzük. A fogalom megértését az alábbi példák könnyítik meg:

1. Az egyenes egydimenziós, mert az egységvektor minden valós számot képes előállítani, ha azt a kérdéses valós számmal megszorozzuk.
2. A sík kétdimenziós, mert a két egységvektor minden síkbeli vektort képes előállítani, hasonlóan a tér háromdimenziós.

## 172.5.3 Mátrixok

Számos probléma megoldását egyszerűsítik le a mátrixok. Általánosan *mátrixnak* nevezünk minden  $n \times m$ -es táblázatot, amelyet szögletes vagy kerek zárójelek közé teszünk.

Például a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

mátrixnak  $n$  sora és  $m$  oszlopa van, ezt az  $\mathbf{A}_{(n,m)}$  fogja jelölni, ahol az alsó indexek a sorokat, illetve az oszlopokat jelölik. Az  $\mathbf{A}_{(1,m)}$  mátrix egy sorból és  $m$  oszlopból áll, azaz egy sorvektorról van szó. Hasonlóan láthatjuk be azt is, hogy az oszlopvektorok speciális mátrixok. Az alábbiakban definiálunk néhány – a későbbiekben használatos – speciális mátrixot.

### 32. Definíció

Az  $\mathbf{A}_{(n,m)}$  mátrix **transzponált** mátrixán azt az  $\mathbf{A}_{(m,n)}^*$  mátrixot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival.

Például a

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & -1 \\ -4 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ mátrix transzponáltja a } \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 5 \\ 5 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ mátrix.}$$

### 33. Definíció

**Négyzetesnek** nevezünk egy mátrixot, ha a sorok és az oszlopok száma azonos.

A négyzetes mátrixok esetében – és csakis náluk – beszélhetünk a főátló fogalmáról. Ez utóbbin az átlóban álló

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{1,2} & \mathbf{a}_{1,3} \dots & \mathbf{a}_{1,n} \\ \mathbf{a}_{2,1} & \mathbf{a}_{2,2} & \mathbf{a}_{2,3} \dots & \mathbf{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n,1} & \mathbf{a}_{n,2} & \mathbf{a}_{n,3} \dots & \mathbf{a}_{n,n} \end{pmatrix}$$

elemeket értjük.

### 34. Definíció

**Diagonális mátrix** az a négyzetes mátrix, amelynek csak a főátlóban van zérustól különböző eleme.

### 35. Definíció

**Egység mátrixnak** nevezzük azt a diagonális mátrixot, amely főátlójában egységek állnak.

### 36. Definíció

**Szimmetrikusnak** nevezzük azt a négyzetes mátrixot, amely esetében  $a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i,j$  esetén.

### 37. Definíció

**Zérus mátrixnak** nevezzük azt a mátrixot, amelynek minden eleme zérus.

### 38. Definíció

**Antiszimmetrikusnak** nevezzük azt a négyzetes mátrixot, amelyik esetében  $a_{i,j} = -a_{j,i} \quad \forall i,j$  esetén.

## 172.5.4 Mátrixaritmetika

Az elkövetkezőkben – hacsak másra nem utalunk – a mátrixok elemei valós számok lesznek. Mátrixoknak egy elég bő halmazán – hasonlóan az absztrakt algebra tanulmányainknál megszokottakhoz – praktikus módon műveleteket definiálunk. A transzponált képzése például egyváltozós műveletnek is felfogható, de hasonlóan a valós számok halmazához, definiáljuk az összeadás és a szorzás műveleteket, illetve a *skalárral* való szorzást.

### 39. Definíció

Az  $\mathbf{A}_{(n,m)}$  mátrix akkor és csakis akkor egyenlő a  $\mathbf{B}_{(n,m)}$  mátrixszal, ha elemeik rendre egyenlők, azaz  $a_{i,j} = b_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ).

### 40. Definíció

Az  $\mathbf{A}_{(n,m)}$  mátrix és a  $\mathbf{B}_{(n,m)}$  mátrix összegén azt a  $\mathbf{C}_{(n,m)}$  mátrixot értjük, amelynek elemeire  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ).

### Megjegyzés

1. A definícióból következően csak azonos sor és oszlopszámmal rendelkező mátrixokat tudunk összeadni.
2. Mátrixokat úgy adunk össze, hogy a megfelelő komponenseiket összeadjuk.

### 41. Definíció

Mátrixot úgy szorzunk egy valós számmal, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk, azaz  $k \cdot \mathbf{A}_{(n,m)} = \mathbf{B}_{(n,m)}$ , ahol  $b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ).

### 27. Tétel

**Minden négyzetes mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére.**

### Bizonyítás

Ha adott az  $\mathbf{A}_{(n,n)}$  mátrix, akkor legyen  $\mathbf{S}_{(n,n)}$  és  $\tilde{\mathbf{S}}_{(n,n)}$  két mátrix, amelyeket az alábbi módokon definiálunk:

$$\mathbf{S}_{(n,n)} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{A}_{(n,n)} + \mathbf{A}_{(n,n)}^*), \quad \tilde{\mathbf{S}}_{(n,n)} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{A}_{(n,n)} - \mathbf{A}_{(n,n)}^*)$$

Ekkor

$$\mathbf{A}_{(n,n)} = \mathbf{S}_{(n,n)} + \tilde{\mathbf{S}}_{(n,n)}$$



### 28. Tétel

**Mátrixoknak egy elegendően bő halmaza zárt az összeadásra nézve, továbbá az összeadás kommutatív, asszociatív, egységelem a zérusmátrix.**

### Bizonyítás

Az összeadás definíciójából azonnal következnek a tétel állításai, ezért a bizonyítás triviális.



**29. Tétel**

Legyen  $n$  rögzített, és tekintsük az összes  $A_{(n,n)}$  számmátrixok halmazát. Ez a halmaz a valós számtest feletti lineáris tér.

**Bizonyítás**

A lineáris tér definíciójából és a 28. tételből következik.



A vektorokkal ellentétben definiálni fogjuk két mátrix szorzatát is, de nem tetszőleges mátrixok esetében. Az  $A_{(n,p)}$  mátrix akkor és csak akkor szorozható össze a  $B_{(p,m)}$  mátrixszal, ha a szorzandó (első) mátrixnak annyi oszlopa van, mint ahány sora a szorzó (második) mátrixnak. Ekkor az eredmény  $C_{(n,m)}$  mátrixnak  $n$  sora és  $m$  oszlopa lesz. Az eredmény mátrix elemeit pedig az alábbiak szerint definiáljuk.

**42. Definíció**

Ha adottak az  $A_{(n,p)}$ ,  $B_{(p,m)}$  mátrixok, akkor a szorzat  $C_{(n,m)}$  mátrix elemeit az alábbiak szerint számítjuk ki:

$$c_{i,k} = a_{i,1} \cdot b_{1,k} + a_{i,2} \cdot b_{2,k} + \dots + a_{i,p} \cdot b_{p,k}$$

**Megjegyzés**

A mátrixok szorzása nem kommutatív, de disztributív művelet (az összeadásra nézve). Feladatként kell megvizsgálnia az olvasónak, hogy asszociatív művelet-e a mátrixszorzás.

**30. Tétel**

Legyen  $n$  rögzített, és tekintsük az összes  $A_{(n,n)}$  számmátrixok halmazát. A szorzás műveletre nézve az egységmátrix a multiplikatív egység, a zérusmátrix pedig a zéruselem.

**Bizonyítás**

A tétel belátását az olvasóra bízuk.

**172.5.5 Egyenletrendszerek**

Az

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2$$

alakú kifejezéseket két ismeretlenes egyenletrendszernek nevezzük. Az egyenletrendszer megoldása azt jelenti, hogy megkeressük azokat az értékeket, amelyeket az egyenletrendszer ismeretlenjeinek a helyébe beírva igaz állításokat kapunk. Egy egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy egy megoldása van, vagy végtelen sok a megoldások száma. Középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy a fenti egyenletrendszer két egyenest definiál a síkon, és a lehetséges megoldások geometriailag az alábbiakat jelentik.

1. A két egyenes egy pontban metszi egymást. Ekkor az egyetlen megoldás a metszéspont alkotta szám pár.
2. A két egyenes párhuzamos, ezért nem metszik egymást. Ekkor nincs az egyenletrendszernek megoldása.

3. A két egyenes egybeesik, ekkor végtelen sok szám pár elégíti ki az egyenletrendszert.

Mátrixszorzással a fenti egyenletrendszer az alábbi alakban is felírható:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Például a

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 &= 17 \end{aligned}$$

egyenletrendszer mátrixokkal történő felírása – figyelembe véve a mátrixok szorzásáról tanultakat – az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

A két ismeretlenes egyenletrendszerek mintájára  $n$ -ismeretlenes egyenletrendszert is definiálhatunk az alábbi módon:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Szorzatokban az alábbiak szerint írhatjuk fel a fenti egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

#### 43. Definíció

**Lineárisnak** nevezzük a fenti egyenletrendszert akkor és csakis akkor, ha az ismeretlenek legfeljebb az első hatványon szerepelnek az egyenletekben.

#### 44. Definíció

Ha a fenti egyenletrendszerben szereplő  $b_i$ -számok mindegyike zérus, akkor **homogén** egyenletrendszerről beszélünk, ellenkező esetben az egyenletrendszer **inhomogén**.

A feladatunk a továbbiakban az, hogy módszert, illetve algoritmust adjunk arra, hogy a fenti egyenletrendszer megoldásait megkeressük, illetve arra, hogy a megoldhatóságot egyáltalán eldönthessük.

#### 45. Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer **ekvivalens átalakításain** azokat a transzformációkat értjük, amelyek során olyan egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldásai azonosak az átalakítást megelőző egyenletrendszer megoldásaival.

#### 31. Tétel

**Egy lineáris egyenletrendszer ekvivalens átalakításai a következők:**

**Az egyenletrendszer egyik sorát megszorozzuk egy nem nulla számmal.**

**Az egyenletrendszer két sorát megcseréljük egymással.**

**Az egyenletrendszer két oszlopát megcseréljük egymással.**

**Az egyik egyenletrendszer egyik sorához, hozzáadjuk egy másik sorát.**

## 172.5.6 Gauss-elimináció

Az alábbiakban ismertetett módszer könnyen programozható, egyszerű algoritmus, amelynek több gyorsított változata is ismert. Legyen adott az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer.

Feltehetjük, hogy az egyenletrendszer nem minden együtthatója nulla, mivel a sorok és oszlopok cseréje nem változtat az egyenletrendszer megoldáshalmazán, alkalmas cserékkel elérhetjük, hogy  $a_{1,1} \neq 0$  teljesül.

Vonjuk ki a második egyenletből az első egyenlet  $\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}$  szorzását. majd a harmadik

egyenletből az első egyenlet  $\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}$  szorzását, majd az eljárást folytatva az  $n$ . egyenletből az

első egyenlet  $\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}$  szorzását.

Az eljárás után az alábbi – az előzővel ekvivalens – rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ 0 + a^{(1)}_{2,2}x_2 + \dots + a^{(1)}_{2,n}x_n &= b^{(1)}_2 \\ &\vdots \\ 0 + a^{(1)}_{n,2}x_2 + \dots + a^{(1)}_{n,n}x_n &= b^{(1)}_n \end{aligned}$$

Az együtthatókon, illetve az egyenlőségjelek jobb oldalán szereplő szabad tagokon elhelyezett felső indexek azt jelzik, hogy ezek általában már más számok, mint az átalakítás előtt. Az első iterációval azt értük el, hogy a második, harmadik, stb. egyenletek első  $a_{i,1}$ -es tagja ( $i = 2, \dots, n$ ) zérus. Tekintsük a második, harmadik, stb. egyenletekből álló rendszert. Ekkor is feltehetjük, hogy ekvivalens átalakítások után  $a^{(1)}_{2,2} \neq 0$ . A harmadik egyenletből

vonjuk ki a második egyenlet  $\frac{a^{(1)}_{3,2}}{a^{(1)}_{2,2}}$  szorzását, majd a negyedik egyenletből a második

egyenlet  $\frac{a^{(1)}_{4,2}}{a^{(1)}_{2,2}}$  szorzását, majd az eljárást folytatva az utolsó egyenletből a második egyenlet

$\frac{a^{(1)}_{n,2}}{a^{(1)}_{2,2}}$  szorzását. Az ekvivalens átalakítások után jutunk az

$$\begin{aligned}
 a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b^{(1)}_1 \\
 0 + a^{(1)}_{2,2}x_2 + \dots + a^{(1)}_{2,n}x_n &= b^{(1)}_2 \\
 &\vdots \\
 0 + 0 + \dots + a^{(2)}_{n,n}x_n &= b^{(2)}_n
 \end{aligned}$$

rendszerhez. Ekkor – a harmadik sortól kezdődően – a második oszlop együtthatóit nulláztuk ki. Az első és második egyenlet együtthatói nem változnak, ezért ezek felső indexét sem változtattuk meg. Az eljárást folytatva – amennyiben az egyenletrendszer megoldható – olyan rendszerhez jutunk, ahol az utolsó egyenletben csak egyetlen ismeretlen, az utolsó előttiben csak két ismeretlen – és így tovább – szerepel. Ekkor az utolsó egyenletből kiszámíthatjuk az  $x_n$  ismeretlen értékét. Ezt felhasználva, az utolsó előtti egyenletből kiszámíthatjuk az  $x_{n-1}$  ismeretlen értékét, majd hasonlóan folytatva, az előzőleg már kiszámolt ismeretlenek értékeit felhasználva kiszámíthatjuk a következő ismeretlen értékét.

Célszerű az egyenletrendszerek felírása helyett a kibővített mátrixra hagyatkozni. A kibővített mátrixot úgy kapjuk meg, hogy az utolsó oszlop helyére a szabad tagokat írjuk. Ekkor az alábbi mátrixhoz jutunk:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}$$

Ezen kell elvégeznünk a tanult ekvivalens átalakításokat, mindaddig, amíg egy olyan mátrixhoz nem jutunk, amelynek az  $a_{i,i}$  elemei alatt csupa 0 áll.

Ha az egyenletrendszer ekvivalens átalakításai során ellentmondásra jutunk, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

## 172.5.7 Lineáris egyenletrendszer megoldása determinánsok segítségével

Az alábbiakban ismertetünk egy olyan megoldást, amelyik az egyenletrendszerek megoldását az ún. determinánsok kiszámítására vezeti vissza. Mivel itt csak a másod- és harmadrendű determinánsok kiszámítását tanuljuk, ezért a módszerrel is csak két-, illetve három ismeretlenes lineáris egyenletrendszereket tud majd megoldani, de felhívjuk a figyelmét arra, hogy tetszőleges  $n$ -re is kifejezhető az  $n$ -ed rendű determináns, ezért tetszőleges  $n$ -ismeretlenes lineáris egyenletrendszerek is megoldhatók a módszer segítségével.

### 46. Definíció

Négyzetes mátrixokhoz – jól definiált módon – rendelt számot **determinánsnak** nevezünk.

Egy mátrix determinánsának a kifejtése általános esetben az ún. adjungált aldeterminánsok segítségével történik. Ezen a kurzuson csak a másod- és harmadrendű determinánsok kiszámítását tanuljuk meg, mert ebben az esetekben nem szükséges bevezetnünk az adjungált aldetermináns fogalmát. Éppen ezért definícióként fogjuk megadni a kiszámítás módjait.

**47. Definíció**

Ha adott a  $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$  mátrix, akkor az ehhez rendelt determinánst a  $D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$  jelöli, kiszámításának képlete pedig  $D = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$ .

Hasonló módon adjuk meg a harmadrendű determináns fogalmát.

**48. Definíció**

Ha adott az  $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$  mátrix, akkor az ehhez rendelt determinánst a

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

jelöli, kiszámításának képlete pedig  $D = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - (a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3})$ .

Nagyon fontos az az eset – még sokszor fogunk hivatkozni rá – amikor egy determináns értéke zérus.

**32. Tétel**

**Ha egy másodfokú lineáris egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nem nulla, akkor a megoldásokat az alábbi képletek szolgáltatják:**

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{D} \text{ és } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

ahol  $D$  az együtthatók mátrixának determinánsát jelöli.

Hasonlóan, a harmadrendű lineáris egyenletrendszerek esetében érvényes a

**33. Tétel**

**Ha egy harmadfokú lineáris egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nem nulla, akkor a megoldásokat az alábbi képletek szolgáltatják:**

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

**Megjegyzések**

1. Ha a determináns és a számlálóban kifejtendő determináns értéke egyidejűleg zérus, akkor **végtelen sok megoldása** van az egyenletrendszernek.
2. Abban az esetben, ha a determináns zérus, de van olyan számlálóbeli érték, amelyik különbözik a nullától, akkor **nincs megoldás**.

## 172.5.8 Forgató és tükröző mátrixok

A mátrixoknak – az informatikában vett – gyakorlati alkalmazásaira egy másik példát is megmutatunk. A képernyőn történő forgatások, tükrözések és egyéb alakzat manipulációk visszavezethetők mátrixok szorzására.

### 34. Tétel

Ha adott a sík egy tetszőleges  $P(x,y)$  pontja, akkor ennek az  $X$ -tengelyre vett  $P'(x',y')$  tükrképét az  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  mátrixszal való szorzással állíthatjuk elő.

### Bizonyítás

Felrajzolva a pontnak az  $X$ -tengelyre vett tükrképét láthatjuk, hogy

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y$$

Ezért

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Hasonlóan láthatjuk be az alábbi tételeket:

### 35. Tétel

Ha adott a sík egy tetszőleges  $P(x,y)$  pontja, akkor ennek az  $Y$ -tengelyre vett  $P'(x',y')$  tükrképét a  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixszal való szorzással állíthatjuk elő.

### 36. Tétel

Ha adott a sík egy tetszőleges  $P(x,y)$  pontja, akkor ennek az **origó** körül vett  $\alpha$ -szöggel való elforgatásával kapott  $P'(x',y')$  pontot a  $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$  transzformációs mátrix állítja elő.

Az utóbbi két tétel bizonyítását az olvasóra bizzuk. A 36-os tétel bizonyításakor a középiskolában tanult addíciós tételeket célszerű felhasználni.

## 172.5.9 Lineáris transzformációk

A sík minden pontját megszorozva egy  $2 \times 2$ -es mátrixszal, szintén egy-egy síkbeli pontot kapunk eredményül, tehát a sík egy transzformációjáról beszélhetünk. Természetesen a kapott pontok nem feltétlenül különböznek. Például a  $2 \times 2$ -es zérusmátrix az egész síkot az origóba „húzza” össze.

### 49. Definíció

Ha adott egy  $H$  lineáris tér a valós számtest felett, akkor a térnek egy  $\varphi: H \rightarrow H$  transzformációja **homogén**, ha bármely  $\lambda$  valós számra és bármely  $\mathbf{x} \in H$  esetén

$$\varphi(\lambda \cdot \mathbf{x}) = |\lambda| \cdot \varphi(\mathbf{x})$$

A definíció szemléletes a tartalma a következő: Mindegy, hogy a vektor szorzását végezzük el elsőnek, majd utóbb hajtjuk végre a transzformációt, az eredmény azonos lesz azzal a vektorral, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti vektort transzformáljuk, majd utóbb szorozzuk azt meg.

### 50. Definíció

Ha adott egy  $H$  lineáris tér a valós számtest felett, akkor a térnek egy  $\varphi: H \rightarrow H$  transzformációja **additív**, ha bármely  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$  esetén

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$$

Additív transzformációk esetében az összeadás és a leképezés sorrendje cserélhető fel.

### 51. Definíció

Ha adott egy  $H$  lineáris tér a valós számtest felett, akkor a térnek egy  $\varphi: H \rightarrow H$  transzformációja **lineáris**, ha homogén és additív.

A sík lineáris transzformációinak egy részét már középiskolából ismerhetjük. Ezek a tükrözés, párhuzamos eltolás, forgatás. Megjegyezzük, de itt nem bizonyítjuk, hogy ezek mindegyike előállítható tengelyes tükrözések véges sok ismétlésével. A lineáris transzformációk és a mátrixok kapcsolatát az alábbi alapvető tétel írja le.

### 37. Tétel

**A sík lineáris transzformációinak a halmaza, továbbá a  $2 \times 2$ -es – nem nulla determinánssal rendelkező – mátrixok halmaza ekvivalens.**

## 172.5.10 Feladatok

1. Számítsuk ki a következő determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a Cramer-szabály segítségével:

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31$$

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \quad 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \quad 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 10$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a Gauss-eliminációs módszerrel:

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \quad 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \quad 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \quad x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \quad 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \quad 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2$$

4. Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

# 6. TÉMA

## Kombinatorika

Számos probléma vezethető vissza olyan feladatokra, amelyek egy véges halmaz elemeinek – különböző jelegű – leszámolására vonatkoznak. Például, hogy hányféleképpen válogathatunk ki 20 elem közül hármas sorozatokat, vagy hogy egy 20 betűből álló ábécéből hány darab egymástól különböző 5 hosszú sorozatokat képezhetünk. Az informatika számára különösen fontosak a kombinatorika által felvetett problémák és az ezekre adott válaszok.

### 172.6.1 Permutáció

#### 38. Tétel

Legyen  $H$  tetszőleges halmaz. Ha a  $H$  elemeinek száma  $n$ , akkor  $H$  elemeinek az összes lehetséges sorba rendezéseinek a száma  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ .

#### Bizonyítás

Az első sorozat első helyére  $n$ -féle módon választhatjuk ki az első elemet. A megmaradó  $n-1$  elemből választhatjuk majd ki a másodikat, azaz, a sorozat első két helyére  $n \cdot (n-1)$  módon választhatjuk ki az elempárost. Hasonlóan folytatva láthatjuk be a tétel állítását  $n$  elem esetére.



#### 52. Definíció

Az  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  kifejezést  $n!$  ( **$n$ -faktoriális**) jelöli.  $0! = 1$ , definíció szerint.

#### Megjegyzések

1. Számos probléma vezethető vissza a 38. tételben megfogalmazott problémára.
2. A 38. tételben említett,  $n$ -elemnek az összes lehetséges sorba rendezését a halmaz elemeinek **ismétlés nélküli permutációjának** nevezzük és  $P_n$ -nel jelöljük.
3. A 38. tétel és az 52. definíció szerint  $P_n = n!$

#### 39. Tétel

Legyen adott  $n$  darab elemünk, amelyek között  $k_1, k_2, \dots, k_r$  darabot azonosaknak tekintünk,  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ . Ekkor az  $n$  darab elemből képzett – egymástól megkülönböztetett –  $n$ -hosszú sorozatok száma  $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$ .

#### Bizonyítás

A számlálóban álló kifejezés az ismétlés nélküli permutációt jelöli. Az összes lehetséges sorozatból  $k_1!$  azonosnak tekintendő. Minden ilyen sorozathoz tartozó  $k_2!$  darab szintén azonos, és így tovább.



## 172.6.2 Kombináció

Egy véges halmaz részhalmazainak a száma annyi, ahányféleképpen tudunk különböző csoportokat (részhalmazokat) kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel.

### 40. Tétel

**Ha adott  $n$ -darab – egymástól megkülönböztetett – elemünk, akkor az ezekből alkotható  $k$ -elemű csoportok száma, ahol  $k \leq n$ ,  $C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$ .**

### Bizonyítás

Az első elem kiválasztásánál  $n$ -darab lehetőségünk van, a másodikonál, már csak  $(n-1)$ , végül a  $k$ . elem esetében  $(n-k+1)$ . Mivel a kiválasztás *sorrendje* tetszőleges ezért az összes lehetséges eset annyiad részével csökkentendő, ahányféleképpen rendezhető sorba a  $k$  darab elem. Ezt tartalmazza a kifejezés nevezője.



### Megjegyzés

1. A tételben szereplő kifejezés annyira alapvető lesz a további munkánk során, hogy külön jelölést is bevezetünk, erre utal a következő definíció.

2. A faktoriális fogalmának definíciójából azonnal következik, hogy 
$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 53. Definíció

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Az egyenlőséggel baloldalán látható kifejezést úgy olvassuk ki, hogy „ $n$  alatt a  $k$ ”.

Abban az esetben, ha a kiválasztási eljárás során egy elemet többször is kiválaszthatunk – például visszatevéssel –, akkor a kiválasztható  $k$ -elemű csoportok száma

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}.$$

## 172.6.3 Variáció

Módosítsuk a kombinációk bevezetésekor felvetett problémánkat! Ha adott egy  $n$ -elemű véges halmaz, akkor hány darab  $k$ -hosszú ( $k \leq n$ ) sorozatot tudunk a halmaz elemeiből képezni? A válasz triviálisan következik az eddig tanultakból, azaz  $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

Módosítsuk a problémát úgy, hogy a képzett sorozatokban az elemek ismétlődhetnek! Például 2 elemből hányféle 5 hosszú sorozatot képezhetünk. Általánosságban,  $n$ -elemből hányféle  $k$ -hosszú sorozat képezhető. A válasz nyilvánvalóan:  $V_n^{k,i} = n^k$ . Az informatikában ezeket a lépten-nyomon felbukkanó feladattípusokat ismétlés nélküli, illetve ismétléses variációknak nevezzük. Mondjuk ki definícióként is az eddigieket!

### 54. Definíció

$n$ -elemből képezhető  $k$ -hosszú jelsorozatok az elemek ismétléses variációjának nevezzük és  $V_n^{k,i}$ -vel jelöljük.

**55. Definíció**

$n$ -elemből képezhető  $k$ -hosszú jelsorozatok – ahol az elemek nem ismétlődhetnek – az  $n$  elem ismétlés nélküli variációjának nevezzük, és  $V_n^k$ -vel jelöljük.

A fentiek összefoglalásaként tehát:

1.  $V_n^{k,i} = n^k$

2.  $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

# 7. TÉMA

## Valószínűségszámítás alapelemei

A valószínűségelmélet – annak ellenére, hogy már a középkor biztosítási ügyletei, illetve a szerencsejátékok kapcsán már felvetődtek, sőt sok esetben megoldódtak bizonyos valószínűségszámítási problémák – a matematika egy viszonylag új ága. Ennek oka, hogy a valószínűségelmélet csak akkor épült be a matematika fogalmi rendszerébe, amikor az egy korrekt alapokon nyugvó – és az addigi rendszerbe beilleszthető – felépítést kapott. Ez utóbbit Kolmogorov végezte el, kimutatva azt, hogy a valószínűségelmélet tulajdonképpen az általános mértékelmélet egyik konkretizációjaként is felfogható. Mivel a különböző sztochasztikus modellek, a számítógépes szimulációk, a Monte Carlo módszerek, mind-mind a valószínűségszámítás egy-egy alkalmazását jelentik, ezért részletesen tárgyaljuk az alapfogalmakat és a vonatkozó tételeket.

### 172.7.1 Valószínűségi mező

Mint olyan sokszor már a kurzus során, most is egy alapfogalommal kezdjük a fogalomrendszer felépítését.

**Valószínűségi kísérletnek** nevezünk egy olyan történetet, amely azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor végrehajtható. Egy valószínűségi **kísérlet kimeneteleinek** egy halmaz elemeit fogjuk tekinteni. Érdekes és fontos, hogy a kísérlet kimeneteleinek a halmaza milyen számosságú. Ez a halmaz lehet véges de lehet akár nem megszámlálható számosságú is.

#### Példák

1. Tekintsük a kockadobást, mint egy kísérletet. Ekkor a lehetséges kimenetek halmaza a 1-6 számok valamelyike.
2. Tekintsük a pénzfeldobást, mint egy kísérletet. Ekkor a lehetséges kimenetek halmaza kételemű, de ha valaki a pénz élére állását is ide veszi, akkor háromelemű.
3. Ha megmérjük a Duna vízállását, és ezt valószínűségi kísérletnek tekintjük, akkor kísérlet eredménye a 0 cm – ha a folyó kiszáradt – és mondjuk 800 cm közé eső – elvileg bármelyik – valós szám lehet. A  $[0,800]$  intervallumba eső elemek  $C_1$  számosságú halmazt alkotnak.
4. Álljunk meg egy útkereszteződésben, és tekintsük kísérletnek azt, hogy egy perc alatt hány autó érkezik a kereszteződésbe. A kísérlet kimenetelei természetes számok lesznek. Például 1, 9, 34, stb.

#### 56. Definíció

Egy valószínűségi kísérlet összes lehetséges kimeneteleinek a halmazát  $\Omega$  jelöli. Ez az **eseménytér**.

#### Megjegyzés

1. Ha a kimenetek halmaza véges, akkor az  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  jelölést fogjuk használni.
2. Az 1. példa esetében  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

#### 57. Definíció

Tekintsünk egy valószínűségi kísérletet és az ehhez tartozó  $\Omega$  halmazt! A  $P(\Omega)$  hatványhalmaz minden elemét **eseménynek** nevezzük.

Az esemény fogalma tehát már jól definiált fogalom.

### Példák

1. A kockadobás kísérletnél esemény az, hogy páros számot dobunk, ekkor  $A = \{2,4,6\}$ , és valóban ekkor  $A \in P(\Omega)$  vagy ami ugyan azt jelenti,  $A \subseteq \Omega$ -nak.
2. Az előző 3. példánál események lehetnek a következők: a Duna vízállása magasabb, mint 600, a Duna vízállása kisebb mint 600, de nagyobb, mint 400.

### Megjegyzés

1. Fontos következményei a fenti definíciónak, hogy az üres halmazt és az  $\Omega$ -t is eseménynek nevezzük. Az előbbi neve a **lehetetlen esemény**, az utóbbit pedig **biztos esemény**nek nevezzük.
2. Egy  $A$  esemény bekövetkezik a kísérlet során, ha a kísérlet olyan elemi eseményt produkál, amelyik eleme az  $A$  eseménynek. Ez utóbbi megjegyzés rendkívül fontos! Megértés nélkül a továbbiak értelmezhetetlenek lesznek. E tény miatt a lehetetlen esemény soha nem következhet be, míg a biztos esemény minden esetben (minden kísérlet során) bekövetkezik!

## 172.7.2 Eseményalgebra

### 58. Definíció

Legyen adott egy valószínűségi kísérlet, továbbá legyen  $H, K \in P(\Omega)$  két tetszőleges esemény. Ekkor a  $H \cup K$  esemény akkor és csakis akkor következik be, ha vagy  $H$  vagy  $K$  bekövetkezik. A  $H \cup K$  eseményt a **két esemény összegének** nevezzük.

### 59. Definíció

Legyen adott egy valószínűségi kísérlet, továbbá legyen  $H, K \in P(\Omega)$  két tetszőleges esemény. Ekkor a  $H \cap K$  esemény akkor és csakis akkor következik be, ha mind  $H$  mind  $K$  bekövetkezik. A  $H \cap K$ -t a két esemény szorzatának nevezzük.

### 60. Definíció

Legyen adott egy valószínűségi kísérlet, továbbá legyen  $H \in P(\Omega)$  egy tetszőleges esemény. Ekkor a  $\bar{H}$  esemény akkor és csakis akkor következik be, ha a  $H$  esemény nem következik be. A  $\bar{H}$ -t a  $H$  esemény **kiegészítő** vagy **komplementer** eseményének nevezzük.

### 41. Tétel

Legyen adott egy valószínűségi kísérlet. A  $\langle P(\Omega); \cup, \cap \rangle$  struktúra Boole-algebra.

### Bizonyítás

A Boole-algebra definíciójából és a fenti definíciókból azonnal következik a tétel.



### 61. Definíció

Legyen adott egy valószínűségi kísérlet, továbbá legyenek  $A_1, A_2, \dots, A_n \in P(\Omega)$  olyan események, amelyekre teljesül, hogy  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$  és  $A_i \cap A_j = \emptyset$   $i \neq j$  esetén.

Ekkor az  $A_1, A_2, \dots, A_n \in P(\Omega)$  rendszert **teljes eseményrendszernek** nevezzük.

## 172.7.3 Valószínűségi mérték

Ha adott egy kísérlet, akkor a kísérlet eseményeit számszerűen is jellemezni fogjuk. Ez a – minden eseményhez hozzárendelt – szám lesz az adott esemény valószínűsége.

### 62. Definíció

Legyen adott egy valószínűségi kísérlet, illetve a továbbiakban jelölje **A** az események  $P(\Omega)$  hatványhalmazát. A  $\mathbf{P}: \mathbf{A} \rightarrow [0,1]$  leképezést valószínűségi függvénynek nevezzük, ha

1.  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
2.  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3.  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$  ha  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

### 63. Definíció

Legyen adott egy valószínűségi kísérlet. Az  $\langle \Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P} \rangle$  tripletet (hármast) a kísérlethez rendelt **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

### Megjegyzés

1. A fentiekből következik, hogy minden egyes kísérlethez más és más valószínűségi mező tartozik.
2. Ha már megadtuk az elemi események halmazát, akkor csak a **P** meghatározása a kérdéses. Ezt a függvény a gyakorlatban a statisztikák szolgáltatják.
3. Vannak olyan problémahalmazok, amelyek típusos mezőhöz vezetnek, ezekre később kitérünk.
4. Klasszikusnak nevezünk egy valószínűségi mezőt, ha az elemi események halmaza megszámlálható az elemi eseményeken a valószínűségi függvény azonos értékeket vesz fel.

## 172.7.4 Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal

Mint azt az előbbi megjegyzésekben említettük az igazi feladat egy kísérlet esetében a **P** függvény korrekt meghatározása. Ezt teszi lehetővé az alábbi fogalom.

### 64. Definíció

Legyen adott egy kísérlet. Hajtsuk végre a kísérletet  $n > 0$  alkalommal. Tekintsük az  $A \in P(\Omega)$  eseményt és tegyük fel, hogy a végrehajtott kísérletek során ez előbbi esemény  $k$ -szor ( $0 \leq k \leq n$ ) következett be. A  $\frac{k}{n}$  kifejezést az  $A$  esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük.

A kísérleteknek egy bő halmazán, ha az  $n$  növekszik, akkor az eseményhez tartozó  $\frac{k}{n}$  relatív gyakoriság egy 0 és 1 közé eső szám körül stabilizálódik. Ez a szám lesz majd az eseményhez rendelt valószínűség. Például, ha sokszor dobunk fel egy pénzdarabot, akkor az „írás dobtunk” esemény relatív gyakorisága a 0,5-nél stabilizálódik. Ha sokszor dobunk a kockával, akkor a „3-at dobtunk” esemény az  $\frac{1}{6}$ -hoz közelít.

# Programozandó feladatok

1. Készítse el azt a C vagy C++ nyelven megírt programot, amely az inputként megadott két egészszámnak kiszámítja és megjeleníti a legnagyobb közös osztóját! Rendszertervező hallgatók a feladatot EXCEL munkalapon készítsék el!
2. Készítse el azt a C vagy C++ nyelven megírt programot, amely az inputként megadott két egészszámról megállapítja, hogy azok egymáshoz képest relatív prímek-e vagy sem! Rendszertervező hallgatók a feladatot EXCEL munkalapon készítsék el!
3. Készítse el azt a C vagy C++ nyelven megírt programot, amely az inputként megadott  $n$  természetes számnál kisebb prímszámokat megjeleníti a képernyőn!
4. Készítse el azt a C vagy C++ nyelven megírt programot, amely az inputként megadott természetes számról eldönti, hogy az prím-e vagy sem.
5. Készítse el azt a C vagy C++ nyelven megírt programot, amely az inputként megadott természetes számnak előállítja és megjeleníti a prímtenyezős előállítását!
6. Írjunk programot, amely az inputként  $(a + b \cdot i)$  alakban megadott komplex számon elvégzi az összeadás, kivonás és szorzás műveleteket és outputként megjeleníti azt! (Rendszertervezők az EXCEL táblázatkezelő segítségével oldják meg a feladatot!)
7. Írjunk programot, amely az inputként megadott komplex számot átalakítja trigonometrikus formába, illetve megfordítva, majd az eredményt megjeleníti! (Rendszertervezők az EXCEL táblázatkezelő segítségével oldják meg a feladatot!)
8. Írjunk programot, amely egy megadott komplex számot úgy jelenít meg a képernyőn, mint a sík egy pontját! A képernyő legyen a sík egy részhalmaza.

# Szofi Press Publishing

[www.szofipress.com](http://www.szofipress.com) // [www.facebook.com/SzofiPressPublishing](https://www.facebook.com/SzofiPressPublishing)

